

חילוץ ההתפלגות הגלומה במחירי השוק של אופציות מכר

האקטואר רועי פולניצר¹

תקציר

מחירי השוק של אופציות מכר (Put) אירופאיות מגלמים מידע רב מעבר לשוויין הכלכלי. בהינתן קבוצת אופציות בעלות מועדי פקיעה זהים ומחירי מימוש שונים, ניתן לחלץ מתוך מחירי השוק שלהן את ההתפלגות המשתמעת של מחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה. התפלגות זו משקפת את הערכות השוק תחת ההסתברות הנייטרלית לסיכון, ומאפשרת לאמוד את ההסתברויות המשתמעות לתרחישי שוק שונים ללא צורך בהנחה מוקדמת לגבי צורת ההתפלגות.

מאמר זה מציג שיטה אִפְרִמטרית לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי אופציות מכר. תחילה מוצג הרקע התאורטי לשיטה באמצעות הטענה האלמנטרית ואסטרטגיית הפרפר, ולאחר מכן מובאת הוכחה מתמטית לכך שהנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחירי המימוש שקולה לצפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון. בהמשך ניתן הסבר אינטואיטיבי לקשר שבין מחירי האופציות לבין ההתפלגות המשתמעת, ולבסוף מודגם יישום השיטה באמצעות דוגמה מספרית.

השיטה המוצגת מאפשרת להפיק ממחירי האופציות מידע הסתברותי עשיר על ציפיות השוק, ובכלל זה את צורת ההתפלגות, מידת האסימטריה שלה וההסתברויות המשתמעות לתרחישי קיצון. בכך היא מהווה כלי שימושי עבור מנהלי השקעות, מנהלי סיכונים, מעריכי שווי, כלכלנים וחוקרים המבקשים להפיק מידע נוסף משוק האופציות מעבר לסטיית התקן הגלומה בלבד.

1. הקדמה

מחירי אופציות משקפים לא רק את שוויין של זכויות עתידיות, אלא גם את מכלול הציפיות של משתתפי השוק לגבי התפתחותו העתידית של נכס הבסיס. בעוד שמחיר האופציה הוא נתון יחיד, הוא מגלם בתוכו מידע עשיר על התפלגות המחירים האפשריים בעת הפקיעה, על רמת איהוודאות, על הסיכוי לתרחישים קיצוניים ועל האופן שבו השוק מתמחר סיכון.

ברוב היישומים המעשיים מסתפקים המשתמשים בסטיית התקן הגלומה או במחיר הפורוורד כמדדים מרכזיים לציפיות השוק. אולם שני מדדים אלו מתארים רק חלק קטן מהמידע הגלום במחירי האופציות. כאשר בוחנים בזמנית אופציות בעלות אותו מועד פקיעה אך עם מחירי מימוש שונים, ניתן לחלץ את פונקציית ההתפלגות המשתמעת של מחיר נכס הבסיס, ובכך לקבל תמונה מלאה יותר של ציפיות המשקיעים.

מידע זה חשוב במגוון רחב של יישומים, ובהם ניהול סיכונים, תמחור נגזרים, הערכת שווי, קבלת החלטות השקעה, גיבוש אסטרטגיות גידור ואמידת הסתברויות לאירועים חריגים. מעבר לתוחלת

¹ האקטואר רועי פולניצר הוא הבעלים ומעריך השווי הראשי של פירמת הערכות השווי "שווי פנימי – מעריכי שווי בלתי תלויים", ומייסד ויו"ר לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA). הוא בעל תואר מוסמך במנהל עסקים (MBA), בהתמחות במימון, מאוניברסיטת בן-גוריון בנגב, ובעל ניסיון רב בפיתוח, ביישום ובתיקוף של מודלים כמותיים להערכות שווי ולניהול סיכונים. הוא מיעץ לחברות בביצוע ניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומי ההנדסה הפיננסית, יישום סימולציות מונטה-קרלו, תהליכים סטוכסטיים ופתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות.

ולסטיית התקן, ההתפלגות מאפשרת לבחון גם את מידת האסימטריה של הציפיות, את עובי הזנבות ואת ההסתברויות הגלומות לשינויים קיצוניים במחיר נכס הבסיס.

הספרות המקצועית מציגה שתי גישות עיקריות לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי אופציות. הגישה הראשונה היא גישה פרמטרית, שבה מניחים מראש צורת התפלגות מסוימת או תהליך סטוכסטי כלשהו, ולאחר מכן אומדים את פרמטרי המודל כך שיתאימו ככל האפשר למחירי האופציות הנצפים בשוק. יתרונה של גישה זו הוא בפשטותה ובאפשרות להסיק ממנה מאפיינים שונים של ההתפלגות, אולם היא תלויה בהנחות מוקדמות העלולות להגביל את התוצאה.

הגישה השנייה היא הגישה האפרמטרית, אשר אינה מניחה מראש כל צורת התפלגות או תהליך סטוכסטי. בגישה זו ההתפלגות נגזרת ישירות ממחירי האופציות באמצעות הקשר שבין מחירי האופציות לבין מחירי המימוש שלהן. לפיכך, ההתפלגות המתקבלת מבטאת את המידע הגלום במחירי השוק עצמם, ללא אילוץ של מודל הסתברותי כלשהו.

מאמר זה מתמקד בגישה האפרמטרית ומציג את ההיגיון הכלכלי והמתמטי העומד בבסיסה. בניגוד לרוב ההסברים בספרות, המתבססים על אופציות רכש, המאמר מראה כי ניתן לגזור את אותה התפלגות גם באמצעות מחירי השוק של אופציות מכר בלבד. בהמשך יוצגו הפיתוח המתמטי של השיטה, ההסבר האינטואיטיבי לעקרונותיה ודוגמה מספרית הממחישה את אופן יישומה.

ההתפלגות המחולצת במאמר זה היא ההתפלגות הנייטרלית לסיכון (Risk-Neutral Distribution), הנגזרת ממחירי השוק של האופציות ואשר עקבית עם עקרון היעדר הארביטראז'. בניגוד להתפלגות האמיתית של מחיר נכס הבסיס, המשקפת את ההסתברויות בפועל, ההתפלגות הנייטרלית לסיכון משקפת את ההסתברויות המשתמעות ממחירי השוק, ולכן היא מהווה את הבסיס לתמחור נגזרים ולחילוץ מידע ממחירי אופציות.

2. המידה האמיתית והמידה הנייטרלית לסיכון

א. המידה האמיתית ($P - \text{Physical Measure}$)

במימון כמותי מקובל להבחין בין שתי מערכות הסתברות שונות המתארות את התנהגותם של מחירי נכסים פיננסיים. הראשונה היא המידה האמיתית (Physical Measure) המסומנת בדרך כלל באות P . מידה זו מתארת את ההסתברויות שבהן צפוי העולם להתפתח בפועל, ולכן היא מכונה גם $\text{Real-World Measure}$.

תחת המידה האמיתית, ההתפלגות של מחיר נכס הבסיס משקפת את אמונותיהם של המשקיעים באשר להתפתחות העתידית של השוק. הסתברויות אלו נגזרות מנתונים היסטוריים, מתחזיות מאקרו-כלכליות, מהערכות אנליסטים ומכל מידע אחר הזמין למשקיעים במועד קבלת ההחלטה. מאחר שהמשקיעים דורשים פיצוי בגין נשיאת סיכון, שיעור התשואה הצפוי תחת המידה האמיתית כולל גם את פרמיית הסיכון של הנכס. לפיכך, קצב הגידול הצפוי של מחיר נכס הבסיס אינו בהכרח שווה לריבית חסרת הסיכון, אלא משקף את התשואה שהמשקיעים מצפים לקבל בגין הסיכון שהם נוטלים.

המידה האמיתית משמשת במגוון רחב של יישומים, ובהם חיזוי מחירי נכסים, ניהול סיכונים, סימולציות בעולם האמיתי ($\text{Real-World Simulation}$), אמידת הסתברויות למצבי טבע שונים ובכלל זה לחדלות פירעון אשראי, בניית תחזיות כלכליות וקבלת החלטות השקעה.

ב. המידה הנייטרלית לסיכון (Q – Risk-Neutral Measure)

לצד המידה האמיתית קיימת מערכת הסתברויות נוספת, המכונה המידה הנייטרלית לסיכון (Q -Risk Neutral Measure), ומסומנת באות Q . בניגוד למידה האמיתית, מידה זו אינה מתארת את ההסתברויות שבהן צפוי העולם להתפתח בפועל, אלא מערכת הסתברויות מתמטית המבטיחה עקביות עם עקרון היעדר הארביטראז'.

במסגרת המידה הנייטרלית לסיכון מניחים כי כל הנכסים הפיננסיים מניבים בתוחלת את שיעור הריבית חסרת הסיכון, לאחר התאמה לתזרימי המזומנים שהם צפויים להניב. כתוצאה מכך, ניתן לתמחר מכשירים פיננסיים באמצעות היוון תוחלת תזרימי המזומנים העתידיים לפי הריבית חסרת הסיכון, ללא צורך בהוספת פרמיית סיכון מפורשת.

חשוב להדגיש כי המידה הנייטרלית לסיכון אינה משקפת את אמונותיהם של המשקיעים ואף אינה מתיימרת לחזות את התפלגות המחירים בפועל. מטרתה היחידה היא לספק מערכת הסתברויות עקבית עם מחירי השוק של הנכסים הסחירים ועם עקרון היעדר הארביטראז', שעליו מבוססים מודלי תמחור הנגזרים המודרניים.

משום כך, ההתפלגות המחושבת תחת Q מכונה ההתפלגות הנייטרלית לסיכון (Q -Risk-Neutral Distribution) והיא מהווה את הבסיס התאורטי לתמחור אופציות ולחילוץ מידע ממחירי השוק.

ג. מדוע מאמר זה משתמש במידה הנייטרלית לסיכון?

מחירי אופציות נקבעים בשוק בהתאם לעקרונות התמחור הנייטרלי לסיכון. לפיכך, ההתפלגות שניתן לחלץ ממחירי השוק של אופציות אינה ההתפלגות האמיתית של מחיר נכס הבסיס, אלא ההתפלגות הנייטרלית לסיכון הגלומה במחירי האופציות.

משמעות הדבר היא שההסתברויות המתקבלות במאמר זה אינן הסתברויות אמפיריות ואינן משקפות בהכרח את הסיכוי האמיתי להתרחשותו של כל תרחיש. הן מבטאות את מערכת ההסתברויות העקבית עם מחירי השוק במועד התצפית ועם עקרון היעדר הארביטראז'. מסיבה זו, כל הפיתוח המתמטי שיוצג בפרקים הבאים יתבצע תחת המידה הנייטרלית לסיכון Q , ומתוכה תחולץ פונקציית ההתפלגות המשתמעת ממחירי אופציות המכא.

3. הטכניקה המימונית

א. העיקרון הכלכלי של חילוץ ההתפלגות המשתמעת

מחירי אופציות משקפים את הערכת השוק לגבי כלל המחירים האפשריים של נכס הבסיס במועד הפקיעה. בעוד שכל אופציה בודדת מגלמת מידע חלקי בלבד, מכלול מחירי האופציות במחירי מימוש שונים מהווה מקור מידע עשיר שממנו ניתן לחלץ את ההתפלגות המשתמעת של מחיר נכס הבסיס.

העיקרון הכלכלי העומד בבסיס גישה זו פשוט: אילו היה ניתן לרכוש כיום נייר ערך שישלם יחידת כסף אחת רק אם מחיר נכס הבסיס יהיה שווה לערך מסוים במועד הפקיעה, הרי שמחירו של נייר ערך כזה היה מגלם את ההסתברות הנייטרלית לסיכון להתממשותו של אותו אירוע. נייר

ערך זה מכונה בספרות נכס אלמנטרי (Arrow–Debreu Security) והוא מהווה את אבן היסוד של שיטות החילוץ הא־פרמטריות.

נכסים אלמנטריים אינם נסחרים בפועל בשווקים הפיננסיים. אולם, אחד מעקרונות היסוד של תורת תמחור הנגזרים הוא שניתן לשכפל את תזרים המזומנים שלהם באמצעות שילוב מתאים של מכשירים פיננסיים קיימים. במקרה שלפנינו, ניתן ליצור קירוב לנכס אלמנטרי באמצעות שלוש אופציות מכר בעלות אותו מועד פקיעה אך מחירי מימוש שונים. נניח כי קיימות שלוש אופציות מכר אירופאיות בעלות מועד פקיעה זהה, שמחירי המימוש שלהן הם K_1 , K_2 ו- K_3 כך שמתקיים:

$$K_1 > K_2 > K_3$$

כאשר המרווחים בין מחירי המימוש שווים:

$$K_1 - K_2 = K_2 - K_3 = \Delta K$$

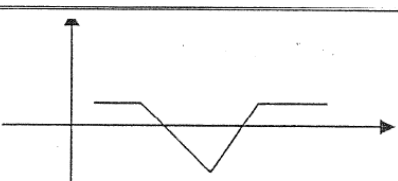
נסמן את מחירי השוק של שלוש האופציות:

$$P(K_1), P(K_2), P(K_3)$$

כעת נבנה את תיק ההשקעות הבא:

- קניית אופציית מכר אחת במחיר מימוש K_1 .
 - כתיבת שתי אופציות מכר במחיר מימוש K_2 .
 - קניית אופציית מכר אחת במחיר מימוש K_3 .
- אסטרטגיה זו מוכרת כאסטרטגיית פרפר (Long Butterfly) והיא מהווה את אבן היסוד של חילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי האופציות.

תרשים 1: פונקציית התשלום של אסטרטגיית פרפר באמצעות אופציות מכר.

אסטרטגיות לשוק יציב	תיאור גרפי
מכירת פרפר	
קניית פרפר	

עלות הקמת התיק היא:

$$P(K_1) - 2P(K_2) + P(K_3)$$

ייחודה של אסטרטגיית הפרפר הוא בכך שהתשלום הסופי שלה מתרכז סביב מחיר מימוש יחיד. כאשר מחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה רחוק ממחיר המימוש האמצעי, כל אחת מאופציות המכר מתקזזת כמעט לחלוטין עם יתר האופציות שבתיק, והתיק מניב תזרים מזומנים אפסי או קרוב לאפס. לעומת זאת, כאשר מחיר נכס הבסיס נמצא בסביבת K_2 , מתקבל תזרים מזומנים חיובי, המגיע לשיאו בדיוק באזור זה.

במילים אחרות, ככל שמרווחי מחירי המימוש קטנים יותר, כך אסטרטגיית הפרפר מתנהגת יותר ויותר כמו נכס אלמנטרי: היא כמעט שאינה משלמת דבר עבור מרבית מחירי נכס הבסיס, אך משלמת סכום חיובי רק כאשר מחיר נכס הבסיס נמצא בתחום צר סביב מחיר המימוש האמצעי. תכונה זו היא שמאפשרת להשתמש במחירה של אסטרטגיית הפרפר כדי לאמוד את ההסתברות המשתמעת לכך שמחיר נכס הבסיס יימצא בסביבת K_2 במועד הפקיעה. למעשה, במקום לנסות להעריך את ההתפלגות כולה באופן ישיר, ניתן להעריך תחילה את ההסתברות לכל תחום מחירים צר, ולאחר מכן לחבר את כלל ההסתברויות לכדי פונקציית צפיפות רציפה.

בשלב זה חשוב להדגיש כי ההסתברויות המתקבלות אינן הסתברויות היסטוריות ואף אינן בהכרח ההסתברויות הסובייקטיביות של כל אחד מהמשקיעים. מדובר בהסתברויות נייטרליות לסיכון (Risk-Neutral Probabilities), כלומר בהסתברויות העקביות עם מחירי השוק של האופציות ועם עקרון היעדר הארביטראז'. הסתברויות אלו הן הבסיס לכל מודלי תמחור הנגזרים המודרניים, ולכן חילוץ ממחירי השוק מאפשר לבחון כיצד השוק מתמחר את כלל התרחישים האפשריים.

בפרק הבא נראה כי כאשר משווים את מחירה של אסטרטגיית הפרפר לתזרים המזומנים שהיא צפויה להניב במועד הפקיעה, מתקבלת נוסחה פשוטה לחישוב ההסתברות הנייטרלית לסיכון לכל תחום מחירים. לאחר מכן נראה כי כאשר מרווחי מחירי המימוש שואפים לאפס, נוסחה זו מתכנסת לפונקציית הצפיפות הרציפה של מחיר נכס הבסיס, אשר מתקבלת מן הנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחירי המימוש.

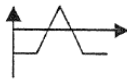
ב. הקשר בין אסטרטגיית הפרפר לבין ההסתברות הנייטרלית לסיכון

לאחר שהוצגה אסטרטגיית הפרפר באופן אינטואיטיבי, ניתן להציג את מבנה התיק באופן פורמלי. האסטרטגיה מורכבת משלוש אופציות מכר בעלות אותו מועד פקיעה אך מחירי מימוש שונים, כפי שמוצג בתרשים 2.

תרשים 2: מבנה אסטרטגיית הפרפר באמצעות אופציות מכר.

סימונים והגדרות:

- X, Y, Z מחירי מימוש שונים.
- $X < Y < Z$
- $c(x) = +$ קניית אופציית רכש במחיר מימוש x
- $c(x) = -$ מכירת אופציית רכש במחיר מימוש x .
- $p(x) = +$ קניית אופציית מכר במחיר מימוש x .
- $p(x) = -$ מכירת אופציית מכר במחיר מימוש x .
- $s = +$ קניית נכס הבסיס.
- $s = -$ מכירת נכס הבסיס.

האסטרטגיה	ניתן לבניה מ:	מאפייני הרווח	מאפייני ההפסד	השפעת הזמן
קניית פרפר Long butterfly 	1. $c(x) + c(z) - 2c(y)$ 2. $p(x) + p(z) - 2p(y)$ 3. $-c(y) + c(x) + p(z)$ $-p(y)$ 4. $-c(y) + c(z) + p(x)$ $-p(y)$	הרווח המקסימומלי מוגבל להפרש בין מחירי המימוש בניכוי עלות ביצוע האסטרטגיה. בכל מחיר שבו נכס הבסיס נמצא בין 2 נק' האיוון יש רווח. מקסימום רווח מתקבל כשמחיר נכס הבסיס = מחיר המימוש y . מתקבלות 2 נק' איוון: מחיר מימוש x + עלות האופציות, מחיר המימוש z - עלות האופציות	ההפסד המקסימומלי מוגבל לעלות ביצוע האסטרטגיה. ההפסד המקסימומלי מתקבל כשמחיר נכס הבסיס גבוה מ z או נמוך מ x .	עקומת רווח/הפסד כמעט שטוחה, עד חודש לפני הפקיעה, שלאחריו קצב ההתכנסות במגמת עלייה. ההתכנסות במגמת עלייה כשמחיר נכס הבסיס קרוב למחיר המימוש

מחירה של אסטרטגיית הפרפר נקבע בשוק בדיוק כפי שנקבע מחירו של כל נכס פיננסי אחר: על פי הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים הצפויים ממנו. לפיכך, אם אסטרטגיית הפרפר מהווה קירוב לנכס אלמנטרי, ניתן להשתמש במחירה כדי לאמוד את ההסתברות שהתרחיש שאותו היא מייצגת אכן יתממש.

נניח כי במועד הפקיעה מחיר נכס הבסיס יימצא בתחום צר סביב מחיר המימוש האמצעי K_2 . במקרה זה תניב אסטרטגיית הפרפר תזרים מזומנים חיובי השווה בקירוב למרווח שבין מחירי המימוש:

$$\Delta K$$

לעומת זאת, בכל יתר תחומי המחירים תניב האסטרטגיה תזרים מזומנים אפסי או זניח. מכאן שתוחלת תזרים המזומנים של האסטרטגיה מורכבת משני מצבים בלבד: מצב שבו מחיר נכס הבסיס נמצא בסביבת K_2 , שבו מתקבל תזרים מזומנים ידוע מראש בגובה ΔK , ומצב משלים שבו התזרים שווה לאפס.

בהנחת היעדר ארביטראז', מחיר האסטרטגיה כיום חייב להיות שווה לערכו הנוכחי של תזרים המזומנים הצפוי. לכן ניתן לרשום:

$$P(K_1) - 2P(K_2) + P(K_3) = e^{-rT} \cdot \Delta K \cdot p(K_2)$$

כאשר:

- r – שיעור הריבית חסרת הסיכון;
- T – משך חיי האופציה עד למועד פקיעה;
- $p(K_2)$ – ההסתברות הנייטרלית לסיכון שמחיר נכס הבסיס יימצא בסביבת מחיר המימוש K_2 .

מכאן מתקבלת מיד הנוסחה לחישוב ההסתברות:

$$p(K_2) = \frac{e^{rT}}{\Delta K} [P(K_1) - 2P(K_2) + P(K_3)]$$

זוהי התוצאה המרכזית של השיטה האפרמטרית. היא מלמדת כי ההסתברות הנייטרלית לסיכון אינה נאמדת באמצעות הנחות לגבי התהליך הסטוכסטי של מחיר נכס הבסיס ואף אינה מחייבת בחירת פונקציית התפלגות מסוימת. כל המידע הדרוש לחישוב מצוי במחירי השוק של שלוש אופציות מכר סמוכות.

חשוב להדגיש כי נוסחה זו אינה מחשבת את ההסתברות לכך שמחיר נכס הבסיס יהיה שווה בדיוק לערך K_2 . בעולם הרציף ההסתברות לקבל ערך יחיד היא אפס. למעשה, ההסתברות המחושבת מתייחסת לתחום מחירים שרוחבו ΔK , אשר במרכזו נמצא מחיר המימוש K_2 . ככל שמרווחי מחירי המימוש קטנים יותר, כך תחום המחירים המצטמצם סביב K_2 נעשה צר יותר, והאומדן מתקרב לפונקציית צפיפות ההסתברות הרציפה.

בפועל, מרווחי מחירי המימוש נקבעים על ידי הבורסה ולכן הם בדידים ואינם שואפים לאפס. אף על פי כן, כאשר קיימים מחירי מימוש רבים וצפופים דיים, ניתן להשתמש בקירוב דיסקרטי זה כדי לאמוד בדיוק גבוה את צורת ההתפלגות הגלומה במחירי האופציות.

יתרונה המרכזי של השיטה הוא בכך שהיא נשענת ישירות על מחירי השוק. במקום להניח מראש שהתפלגות המחירים היא לוג־נורמלית, נורמלית או כל התפלגות אחרת, ההתפלגות נגזרת מן המחירים שנקבעו בפועל על ידי המשקיעים. משום כך היא משקפת את מכלול הציפיות, החששות והערכת הסיכונים של השוק במועד התצפית.

עד כה הצגנו את ההסבר הכלכלי לחילוץ ההסתברות המשתמעת באמצעות אסטרטגיית פרפר. אולם, ניתן להראות כי תוצאה זו אינה רק קירוב אינטואיטיבי, אלא גם תוצאה מתמטית כללית. כאשר מרווח מחירי המימוש שואף לאפס, הביטוי הדיסקרטי של אסטרטגיית הפרפר מתכנס לנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחיר המימוש. תוצאה זו, שהוכחה על ידי Breeden and Litzenberger (1978), מהווה את הבסיס התאורטי לחילוץ פונקציית צפיפות ההסתברות המשתמעת ממחירי אופציות. לפיכך, בחלק הבא נציג את ההוכחה המתמטית המלאה לקשר שבין הנגזרת השנייה של מחירי אופציות מכר לבין פונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון של מחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה.

ג. המעבר מהסתברות בדידה לפונקציית צפיפות רציפה

הנוסחה שפותחה בסעיף הקודם מאפשרת לחשב את ההסתברות הנייטרלית לסיכון לכך שמחיר נכס הבסיס יימצא בתחום מחירים צר סביב מחיר מימוש נתון. אולם, בשלב זה עדיין מדובר בהסתברות המתייחסת לקטע מחירים בעל רוחב סופי, השווה למרווח שבין שני מחירי מימוש סמוכים. כדי לקבל את פונקציית צפיפות ההסתברות של מחיר נכס הבסיס, יש לעבור מן העולם הבדיד אל העולם הרציף.

לשם כך נבחן את משמעותו של המרווח ΔK . בכל חישוב של אסטרטגיית פרפר מתקבלת הסתברות המתייחסת לאזור מחירים מוגבל, שמרכזו במחיר המימוש האמצעי ורוחבו נקבע על ידי המרווח שבין מחירי המימוש. במילים אחרות, ההסתברות המחושבת איננה ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה שווה בדיוק לערך מסוים, אלא ההסתברות שהוא יימצא בתחום מחירים מסוים. הבחנה זו חשובה משום שבעולם רציף ההסתברות לקבל ערך יחיד היא אפס. לפיכך, ככל שמרווח מחירי המימוש קטן יותר, כך תחום המחירים שאליו מתייחסת ההסתברות נעשה צר יותר, והאומדן מתקרב לערכה של פונקציית צפיפות ההסתברות באותה נקודה. מבחינה מתמטית, ניתן לראות כי ההסתברות המחושבת בסעיף הקודם היא למעשה היחס שבין ההסתברות לבין רוחב הקטע ΔK . כאשר מרווח מחירי המימוש שואף לאפס מתקבל הגבול:

$$f(K) = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{p(K)}{\Delta K}$$

כאשר $f(K)$ היא פונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון של מחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה.

במקביל, גם הביטוי הדיסקרטי של אסטרטגיית הפרפר עובר תהליך דומה. כזכור, עלות האסטרטגיה חושבה באמצעות הצירוף:

$$P(K + \Delta K) - 2P(K) + P(K - \Delta K)$$

זהו למעשה הפרש סופי מסדר שני (Second Central Difference), הידוע באנליזה נומרית כקירוב לנגזרת השנייה של פונקציה. כאשר המרווח בין מחירי המימוש הולך וקטן, קירוב זה מתכנס לנגזרת השנייה של מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש:

$$\frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2}$$

מכאן מתקבלת אחת התוצאות החשובות ביותר בתורת תמחור האופציות. פונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון מתקבלת ישירות מן הנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחירי המימוש:

$$f(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2}$$

משוואה זו מהווה את הגרסה הרציפה של השיטה הא-פרמטרית שהוצגה בסעיפים הקודמים. בעוד שאסטרטגיית הפרפר משתמשת בשלוש אופציות סמוכות כדי לאמוד הסתברות עבור תחום

מחירים מוגבל, הנגזרת השנייה מאפשרת לחשב את צפיפות ההסתברות עבור כל מחיר מימוש אפשרי.

חשוב להדגיש כי התוצאה אינה נשענת על הנחה כלשהי לגבי התהליך הסטוכסטי של מחיר נכס הבסיס. אין הכרח להניח כי המחיר מפולג לוגנורמלית, כי הוא מקיים תהליך גיאומטרי מסוג תנועת בראון גיאומטרית (GBM) או כל תהליך סטוכסטי אחר. ההתפלגות נגזרת ישירות ממחירי האופציות הנסחרות בשוק, ולכן היא משקפת את המידע הגלום במחירים עצמם ולא במודל הסתברותי שנבחר מראש.

בפועל, מחירי המימוש של אופציות הנסחרות בבורסה הם בדידים ולכן לא ניתן לחשב את הגבול המתמטי באופן מושלם. עם זאת, כאשר קיימים מחירי מימוש רבים וצפופים דיים, ניתן להשתמש בקירובים נומריים של הנגזרת השנייה כדי לאמוד ברמת דיוק גבוהה את פונקציית צפיפות ההסתברות המשתמעת.

עד כה הוצג ההיגיון הכלכלי והאינטואיציה המתמטית העומדים בבסיס השיטה האפרימטרית. בפרק הבא נוכיח באופן פורמלי כי הקשר בין הנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר לבין פונקציית צפיפות ההסתברות נובע ישירות מן המשוואה הכללית לתמחור אופציות, ללא תלות במודל תמחור מסוים.

4. ההוכחה המתמטית

א. נוסחת התמחור הכללית של אופציית מכר אירופאית

בסעיף הקודם הוצגה האינטואיציה הכלכלית שלפיה ניתן לחלץ את ההתפלגות המשתמעת ממחירי השוק של אופציות מכר באמצעות אסטרטגיית פרפר. להלן נוכיח כי תוצאה זו מתקבלת גם באופן פורמלי מתוך נוסחת התמחור הכללית של אופציית מכר אירופאית תחת ההסתברות הנייטרלית לסיכון.

נסמן את מחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה ב- S_T , את מחיר המימוש ב- K , את שיעור הריבית חסרת הסיכון בריבית רציפה ב- r ואת משך חיי האופציה ב- T . פונקציית התשלום של אופציית מכר אירופאית במועד הפקיעה היא:

$$\max(K - S_T, 0)$$

לפיכך, בהנחת שוק משוכלל, היעדר אפשרויות ארביטראז' וקיומה של מידה נייטרלית לסיכון, מחירה של אופציית מכר אירופאית שווה לערך הנוכחי של תוחלת תזרים המזומנים במועד הפקיעה:

$$P(K) = e^{-rT} E^Q[\max(K - S_T, 0)]$$

כאשר $E^Q[\cdot]$ מציינת תוחלת תחת המידה הנייטרלית לסיכון.

נניח כי ל S_T -קיימת פונקציית צפיפות הסתברות נייטרלית לסיכון, המסומנת ב- $f(S_T)$ במקרה זה ניתן לכתוב את מחיר האופציה בצורה האינטגרלית:

$$P(K) = e^{-rT} \int_0^K (K - S_T) f(S_T) dS_T$$

גבולו העליון של האינטגרל הוא K , שכן עבור כל ערך של $S_T > K$ אופציית המכר פוקעת מחוץ לכסף ותשלומה שווה לאפס.

משוואה זו מהווה את נקודת המוצא להוכחה. בעוד שמחיר האופציה הוא גודל הנצפה ישירות בשוק, פונקציית הצפיפות $f(S_T)$ אינה נצפית באופן ישיר. מטרת ההוכחה היא להראות כי ניתן לחלץ את פונקציית הצפיפות מתוך מחירי האופציות עצמם באמצעות גזירה ביחס למחיר המימוש. לשם כך נשתמש בכלל לייבניץ לגזירת אינטגרל שתלוי בפרמטר. בסעיף הבא נגזור את מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש, ולאחר מכן נגזור פעם נוספת כדי להראות כי הנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס למחיר המימוש פרופורציונלית לפונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון.

ב. גזירת הנגזרת הראשונה ביחס למחיר המימוש

בסעיף זה נגזור את מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש. לצורך כך נשתמש בכלל לייבניץ לגזירת אינטגרל שבו הן האינטגרנד והן גבול האינטגרציה העליון תלויים בפרמטר K . כזכור, מחיר אופציית המכר נתון על ידי:

$$P(K) = e^{-rT} \int_0^K (K - S_T) f(S_T) dS_T$$

על פי כלל לייבניץ מתקיים:

$$\frac{\partial P(K)}{\partial K} = e^{-rT} \left[\int_0^K \frac{\partial}{\partial K} (K - S_T) f(S_T) dS_T + (K - K) f(K) \right]$$

מאחר ש:

$$K - K = 0$$

האיבר הנובע מן הגבול העליון של האינטגרל מתאפס, ולכן מתקבל:

$$\frac{\partial P(K)}{\partial K} = e^{-rT} \int_0^K \frac{\partial}{\partial K} (K - S_T) f(S_T) dS_T$$

כיוון שהנגזרת של $(K - S_T)$ ביחס ל K -שווה ל-1, מתקבל:

$$\frac{\partial}{\partial K} (K - S_T) = 1$$

ולפיכך:

$$\frac{\partial P(K)}{\partial K} = e^{-rT} \int_0^K f(S_T) dS_T$$

האינטגרל המתקבל הוא פונקציית ההתפלגות המצטברת (Cumulative Distribution Function – CDF) של מחיר נכס הבסיס תחת המידה הנייטרלית לסיכון. לכן ניתן לכתוב:

$$\frac{\partial P(K)}{\partial K} = e^{-rT} F(K)$$

כאשר:

$$F(K) = \int_0^K f(S_T) dS_T$$

היא פונקציית ההתפלגות המצטברת הנייטרלית לסיכון. תוצאה זו מלמדת כי הנגזרת הראשונה של מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש אינה נותנת עדיין את צפיפות ההסתברות עצמה, אלא את פונקציית ההתפלגות המצטברת, כשהיא מהווה למועד הנוכחי. כדי לקבל את פונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון, נדרש לגזור את מחיר האופציה פעם נוספת ביחס למחיר המימוש.

ג. גזירת הנגזרת השנייה ביחס למחיר המימוש

בסעיף הקודם הראינו כי הנגזרת הראשונה של מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש שווה לערכה המהווה של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנייטרלית לסיכון:

$$\frac{\partial P(K)}{\partial K} = e^{-rT} F(K)$$

כעת נגזור ביטוי זה פעם נוספת ביחס למחיר המימוש. מאחר שפונקציית צפיפות ההסתברות היא הנגזרת הראשונה של פונקציית ההתפלגות המצטברת, מתקיים:

$$\frac{\partial F(K)}{\partial K} = f(K)$$

ולכן:

$$\frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2} = e^{-rT} f(K)$$

נבודד את פונקציית הצפיפות ונקבל:

$$f(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2}$$

משוואה זו היא תוצאתם היסודית של Breeden and Litzenberger (1978), שלפיה ניתן לחלץ את פונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון מתוך מחירי אופציות אירופאיות באמצעות הנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס למחיר המימוש. בעוד שהפיתוח המקורי הוצג באמצעות אופציות רכש (Call), מן ההוכחה שלעיל עולה כי אותה תוצאה מתקבלת באופן שקול גם באמצעות מחירי אופציות מכר.

בפועל, מחירי המימוש של אופציות הנסחרות בשוק הם בדידים, ולכן לא ניתן לחשב את הנגזרת השנייה באופן ישיר. לפיכך, מקובל להשתמש בקירוב באמצעות הפרשים סופיים מסדר שני (Second Central Difference). כאשר מחירי המימוש מרווחים באופן אחיד במרחק ΔK , מתקבל:

$$\frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2} \approx \frac{P(K + \Delta K) - 2P(K) + P(K - \Delta K)}{(\Delta K)^2}$$

הצבת קירוב זה במשוואה הקודמת מניבה את האומדן המעשי לפונקציית צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון:

$$f(K) \approx e^{rT} \frac{P(K + \Delta K) - 2P(K) + P(K - \Delta K)}{(\Delta K)^2}$$

משוואה זו מהווה את הבסיס ליישום השיטה האֶפֶרמטרית לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי השוק של אופציות מכר. באמצעותה ניתן לאמוד את צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון ישירות ממחירי האופציות, ללא צורך בהנחת צורת התפלגות או תהליך סטוכסטי כלשהו.

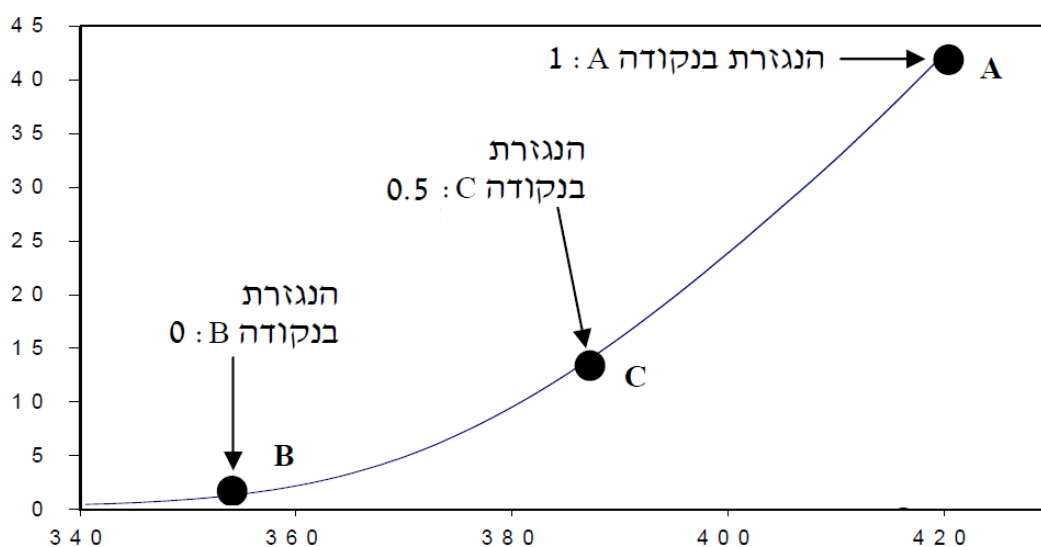
5. הסבר אינטואיטיבי לטכניקה

א. הסבר אינטואיטיבי לטכניקה

בחלק זה נציג באופן אינטואיטיבי את העיקרון העומד בבסיס טכניקת חילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי אופציות מכר. הרעיון המרכזי הוא שמחירי האופציות אינם משקפים רק את ערכן הכלכלי, אלא גם את הערכת השוק ביחס להסתברות שמחיר נכס הבסיס יימצא מעל או מתחת לכל אחד מחירי המימוש במועד הפקיעה.

תרשים 3: הקשר בין מחיר אופציית מכר לבין מחיר המימוש והמשמעות ההסתברותית של הנגזרת הראשונה.

דוגמא תיאורטית: מחירי אופציות Put, לפי שערי מימוש



כאשר מחיר המימוש של אופציית מכר גבוה באופן משמעותי ממחיר נכס הבסיס (נקודה A), האופציה מצויה עמוק בתוך הכסף. במצב זה ההסתברות שהאופציה תמומש גבוהה מאוד, ולכן כל עלייה של יחידה אחת במחיר המימוש מגדילה כמעט באותה מידה את ערך האופציה. במילים אחרות, בסביבה זו השינוי במחיר האופציה ביחס לשינוי במחיר המימוש קרוב ליחידה, והנגזרת הראשונה של מחיר אופציית המכר ביחס למחיר המימוש שואפת לערך 1 (או ל- e^{-rT} כאשר מביאים בחשבון את גורם ההיוון).

משמעות כלכלית זו היא שהשוק מייחס הסתברות נמוכה לכך שמחיר נכס הבסיס יהיה גבוה ממחירי מימוש אלה במועד הפקיעה. בהתאם לפיתוח המתמטי שהוצג בפרק הקודם, ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה גבוה ממחירי מימוש אלה מתקבלת כמשלים של פונקציית ההתפלגות המצטברת, ולכן באזור זה היא קרובה לאפס.

לעומת זאת, כאשר מחיר המימוש נמוך באופן משמעותי ממחיר נכס הבסיס (נקודה B), אופציית המכר נמצאת עמוק מחוץ לכסף. במקרה זה השוק מעריך כי ההסתברות למימוש האופציה נמוכה מאוד, ולכן שינוי נוסף במחיר המימוש כמעט שאינו משפיע על ערך האופציה. כתוצאה מכך, הנגזרת הראשונה של מחיר האופציה ביחס למחיר המימוש מתקרבת לאפס. מבחינה הסתברותית משמעות הדבר היא שההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה גבוה ממחירי מימוש אלה קרובה לוודאות. בין שני הקצוות הללו מתקבל מעבר רציף. ככל שמחיר המימוש עולה, כך גדלה רגישותו של מחיר אופציית המכר לשינויים נוספים במחיר המימוש. שינוי הדרגתי זה ברגישות משקף את השינוי בהערכת השוק לגבי הסתברות המימוש של האופציה בכל אחד ממחירי המימוש.

מקרה מעניין במיוחד מתקבל בנקודה שבה הנגזרת הראשונה של מחיר אופציית המכר שווה בקירוב ל-0.5 (בערכה המוחלט, לאחר התאמת גורם ההיוון). בנקודה זו פונקציית ההתפלגות המצטברת מקבלת ערך של כ-50%, ולכן קיימת הסתברות זהה לכך שמחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה יהיה גבוה או נמוך ממחיר המימוש. מסיבה זו ניתן לראות במחיר המימוש המתאים אומדן לחציון ההתפלגות המשתמעת (נקודה C).

הקשר בין צורת עקומת מחירי אופציות המכר לבין ההתפלגות המשתמעת אינו מסתיים בנגזרת הראשונה. בעוד שהנגזרת הראשונה משקפת את ההסתברות המצטברת, הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס למחירי המימוש משקפת את צפיפות ההסתברות עצמה. עובדה זו היא העומדת בבסיס השיטה האפרימטרית לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי השוק של אופציות מכר, והיא תיושם בדוגמה המספרית שבפרק הבא.

6. דוגמה מספרית

לצורך המחשת אופן יישומה של השיטה האפרימטרית לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי השוק של אופציות מכר, נבחר את הדוגמה המספרית הבאה.

נניח כי מחיר מניה שאינה מחלקת דיבידנד הוא 10 דולר למניה, שיעור הריבית חסרת הסיכון (בריבית רציפה) הוא 3% לשנה, וכי סטיות התקן הגלומות באופציות מכר אירופאיות לתקופה של שלושה חודשים (0.25 שנים), בעלות מחירי מימוש של 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ו-14 דולר הן 30%, 29%, 28%, 27%, 26%, 25%, 24%, 23% ו-22%, בהתאמה.

כפי שהוכח בפרק הקודם, ניתן לאמוד את צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון באמצעות הנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחירי המימוש. מאחר שבפועל מחירי המימוש

הם בדידים, הנגזרת השנייה נאמדת באמצעות קירוב של הפרשים סופיים, כך שמתקבלת המשוואה:

$$f(K) \approx e^{rT} \frac{P(K + \Delta K) - 2P(K) + P(K - \Delta K)}{(\Delta K)^2}$$

כאשר:

- $P(K)$ – מחיר השוק של אופציית מכר שמחיר המימוש שלה הוא K ;
- T – משך חיי האופציה עד למועד פקיעה;
- r – שיעור הריבית חסרת הסיכון;
- ΔK – המרווח בין שני מחירי מימוש סמוכים.

בשלב הראשון נדרש לחשב את ההסתברות עבור תחום המחירים שבין 6 דולר לבין 7 דולר. לשם כך נניח כי סטיית התקן הגלומה משתנה באופן ליניארי בין שני מחירי המימוש, ולכן סטיית התקן המתאימה למחיר מימוש של 6.5 דולר מתקבלת באמצעות אינטרפולציה ליניארית על סטיות התקן הגלומות באופציות מכר בעלות מחירי מימוש של 6 דולר ו- 7 דולר ונאמדה ב-:

$$\sigma_{6.5} = 29.5\%$$

לפיכך, סטיות התקן הגלומות עבור אופציות המכר שמחירי המימוש שלהן הם 6.5 ו- 7 דולר הן 30%, 29.5% ו- 30%, בהתאמה.

בשלב הבא נתמחר את שלוש אופציות המכר עבור מחירי המימוש:

$$K_1 = 6, K_2 = 6.5, K_3 = 7$$

כאשר:

$$\Delta K = 0.5$$

קיימות שיטות רבות להערכת שווי אופציות אשר כולן מתבססות מתבססות על המתודולוגיה של מרטון (Merton 1973) המניחות רציפות או קירוב לרציפות. מודלים "סגורים" המשתמשים במתודולוגיה של מרטון לתמחור נגזרים הנם למשל Black & Scholes והמודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein, שפותח למודל לאטיס המקובל בקרב אנשי חשבונאות בארה"ב. מודלים פתוחים המשתמשים במתודולוגיה זו הם שיטות נומריות מהסוג המכונה Finite Difference Method, מודלים בינומיים (לאטיס) ושיטת מונטה-קרלו.

מקרה פרטי של עולמו של Merton בא לידי ביטוי בנוסחת Black & Scholes או בנוסחת Cox, Ross & Rubinstein המבוססת על תהליך בינומי המתכנס לתהליך רציף כמו בנוסחת Black & Scholes. לפיכך שתי נוסחאות אלו, המהוות מקרה פרטי בעולמו של Merton של זהות לחלוטין. באופן כלכלי, נוסחאות אלו אינן מסוגלות להעריך אופציות הכוללות סעיפים חוזיים כדוגמת מחיר מימוש משתנה והתניות נוספות (בניגוד לאופציות הפשוטות plain vanilla, אותן פותרות הנוסחאות הללו), התניות אלו מכונות "תנאי קצה".

במקרה זה, שווי אופציות המכר חושב באמצעות השיטה הנומרית (Implicit Finite Difference Method - IFDM). השיטה הנומרית מתבססת על המתודולוגיה של Merton, דהיינו, התהליך

הסטוכסטי העומד מאחורי התנהגות המחיר (תנועת בראון גיאומטרית). השיטה מסוגלת להעריך אופציות מכל סוג שהוא כולל את כל ההתניות שהוזכרו למעלה. בספרות מוזכרת השיטה הנומריית כמסוגלת להעריך אופציה אמריקאית (עם אפשרות למימוש מוקדם).

יש לציין כי כאשר מחשבים את ערך אופציית Plain Vanilla (המקרה של Black & Scholes) דרך השיטה הנומריית מקבלים תוצאה זהה לזו שמתקבלת במודל Black & Scholes. השיטה הנומריית מבוססת על מספר עקרונות:

- משוואת הערכה (שלה אין פתרון מפורש כמו במקרה של Black & Scholes) מומרת למשוואת הפרשים.
- בניית מטריצה המשקפת שני ממדים: זמן ומחיר.
- בניית "תנאי הקצה" (הסעיפים המייחדים כל חוזה אופציות).
- חישוב לאחור של ערכה של האופציה להיום.

תמחור אופציות מכר מסוג Plain Vanilla הוא פשוט מאוד. מדובר על 3 אופציות לתקופה של 0.25 שנים, עם סטיות תקן של 30%, 29.5% ו-29%, ומחירי מימוש של 6 דולר, 6.5 דולר ו-7 דולר, בהתאמה, וריבית חסרת סיכון של 3% לשנה, ולא צופים חלוקת דיבידנד במשך חיי האופציה (כאשר האופציה בכל מקרה שומרת על ערכה גם כאשר מתקיימת חלוקת דיבידנד). תחת פרמטרים אלה השיטה הנומריית נותנת שווי של 0.000081 דולר, 0.000500 דולר ו-0.002332 דולר, בהתאמה. לאחר חישוב מחירי האופציות והצבתם במשוואת ההפרשים הסופיים מתקבל אומדן לצפיפות ההסתברות המשתמעת עבור תחום המחירים שבין 6 דולר לבין 7 דולר. הצבת הערכים במשוואת ההפרשים הסופיים מניבה:

$$g_1 = e^{0.03 \cdot 0.25} \frac{0.000081 + 0.002332 - 2 \cdot 0.000500}{0.5^2}$$

ומכאן:

$$g_1 = 0.0057$$

באופן דומה מחושבים אומדני צפיפות ההסתברות עבור יתר תחומי המחירים שבין מחירי המימוש הסמוכים. התוצאות המתקבלות הן:

$$\begin{aligned} g_2 &= 0.0444 \\ g_3 &= 0.1545 \\ g_4 &= 0.2781 \\ g_5 &= 0.2813 \\ g_6 &= 0.1659 \\ g_7 &= 0.0573 \\ g_8 &= 0.0113 \end{aligned}$$

מאחר שכל אחד מן הערכים g_i מייצג אומדן לצפיפות ההסתברות המשתמעת בתחום מחירים שרוחבו דולר אחד, ניתן לפרש ערכים אלה גם כהסתברויות המקורבות לכך שמחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה ימצא בכל אחד מתחומי המחירים המתאימים.

ההתפלגות המשתמעת המתקבלת מתוארת בתרשים 4.

תרשים 4: ההתפלגות המשתמעת הנייטרלית לסיכון שחולצה ממחירי השוק של אופציות

מכר.



מן התרשים ניתן לראות כי עיקר מסת ההסתברות מרוכזת בתחום המחירים שבין 9 דולר לבין 11 דולר, בעוד שההסתברויות לכך שמחיר נכס הבסיס יהיה נמוך או גבוה במידה משמעותית ממחירו הנוכחי קטנות יותר.

סכום ההסתברויות המתקבל עבור תחום המחירים שבין 6 דולר לבין 14 דולר הוא 0.9985. מכאן שההסתברות המשתמעת לכך שמחיר נכס הבסיס במועד הפקיעה יהיה נמוך מ־6 דולר או גבוה מ־14 דולר נאמדת ב־0.0015 בלבד.

למרות שלא ניתן להבחין בכך באופן ברור בתרשים 4, ההתפלגות המשתמעת שחולצה ממחירי אופציות המכר מתאפיינת בזנב שמאלי עבה יותר ובזנב ימני דק יותר בהשוואה להתפלגות לוג־נורמלית. לשם השוואה, נבחן התפלגות לוג־נורמלית המבוססת על סטיית תקן קבועה של 26%, שהיא ממוצע סטיות התקן הגלומות בדוגמה. לפי התפלגות זו, ההסתברות שמחיר המניה בעוד שלושה חודשים יהיה בין 6 דולר ל־7 דולר היא 0.0024, לעומת 0.0057 בהתפלגות המשתמעת שחולצה ממחירי האופציות. באופן דומה, ההסתברות שמחיר המניה יהיה בין 13 דולר ל־14 דולר היא 0.0141 לפי ההתפלגות הלוג־נורמלית, לעומת 0.0113 בלבד בהתפלגות המשתמעת. ממצאים אלה מלמדים כי ההתפלגות המשתמעת מייחסת הסתברות גבוהה יותר לתרחישים של ירידות חדות במחיר המניה והסתברות נמוכה יותר לתרחישים של עליות חדות, ביחס להתפלגות הלוג־נורמלית.

7. סיכום ומסקנות

מאמר זה הציג שיטה אי־פרמטרית לחילוץ ההתפלגות המשתמעת ממחירי השוק של אופציות מכר אירופאיות. בניגוד לשיטות פרמטריות, המחייבות הנחה מוקדמת לגבי צורת ההתפלגות או לגבי

התהליך הסטוכסטי של מחיר נכס הבסיס, השיטה המוצגת נשענת אך ורק על המידע הגלום במחירי האופציות הנסחרות בשוק. לפיכך, ההתפלגות המחולצת משקפת את הערכות השוק, ללא אילוץ של פונקציית התפלגות מוגדרת מראש.

המאמר הציג תחילה את ההיגיון הכלכלי העומד בבסיס השיטה באמצעות הטענה האלמנטרית (Elementary Claim) ואסטרטגיית הפרפר, ולאחר מכן הוכיח כי צפיפות ההסתברות הנייטרלית לסיכון מתקבלת מן הנגזרת השנייה של מחירי אופציות המכר ביחס למחירי המימוש. לבסוף הודגם אופן יישום השיטה באמצעות דוגמה מספרית, שבה חולצה ההתפלגות המשתמעת מתוך מחירי השוק של אופציות מכר בעלות מחירי מימוש שונים.

ההתפלגות המשתמעת מספקת מידע עשיר בהרבה מאשר סטיית התקן הגלומה בלבד. באמצעותה ניתן להעריך את ההסתברויות המשתמעות לתרחישי שוק שונים, לזהות אסימטריה בהתפלגות, לבחון את עובי הזנבות ולהפיק מידע על תפיסת הסיכון של ציבור המשקיעים. בכך היא מאפשרת מעבר מממד תנודתיות בודד לתיאור מלא יותר של ציפיות השוק.

עם זאת, יש לזכור כי ההתפלגות המחולצת אינה בהכרח ההתפלגות שתתממש בפועל. זוהי התפלגות נייטרלית לסיכון, המשקפת את המחירים שבהם נסחרות האופציות בשוק במועד נתון, ולכן היא כוללת גם את השפעת העדפות הסיכון, מגבלות המסחר והביקוש וההיצע בשוק האופציות. משום כך יש לראות בה אומדן עקבי של הערכות השוק, ולא תחזית ודאית של מחירי נכס הבסיס בעתיד.

לשיטה האפרימטרית יתרונות משמעותיים גם מבחינה יישומית. היא ניתנת ליישום בכל שוק שבו נסחרות אופציות בעלות מחירי מימוש שונים, ללא תלות בסוג נכס הבסיס, ויכולה לשמש כלי עזר למנהלי השקעות, מנהלי סיכונים, מעריכי שווי, כלכלנים וחוקרים המבקשים להפיק ממחירי האופציות מידע נוסף מעבר למחירן בלבד.

לסיכום, מחירי אופציות מכר אינם משקפים רק את עלות רכישת ההגנה מפני ירידת ערך נכס הבסיס. הם מגלמים בתוכם מידע הסתברותי רב ערך על ציפיות השוק להתפתחותו העתידית של מחיר הנכס. חילוץ מידע זה באמצעות הנגזרת השנייה של מחירי האופציות מאפשר להמיר מחירי שוק להתפלגות הסתברותית שלמה, ובכך להרחיב באופן משמעותי את המידע שניתן להפיק משוק האופציות.

ביבליוגרפיה

Aït-Sahalia, Y., & Lo, A. W. (1998). *Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices*. *Journal of Finance*, 53(2), 499–547.

Arrow, K. J. (1964). *The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing*. *Review of Economic Studies*, 31(2), 91–96.

Bates, D. S. (1991). *The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets*. *Journal of Finance*, 46(3), 1009–1044.

- Black, F., & Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Boyle, Phelim P. (1977). *Options: A Monte Carlo Approach*. *Journal of Financial Economics* 4, 323-338.
- Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). *Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices*. *Journal of Business*, 51(4), 621–651.
- Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1978). *Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(3), 461–474.
- Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein. (1979). *Option Pricing: A Simplified Approach*. *Journal of Financial Economics* 7, 229-263.
- Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. Yale University Press.
- Hull, J. C. (2002). *Options, Futures, and Other Derivatives* (5th ed.). Prentice Hall.
- Jackwerth, J. C., & Rubinstein, M. (1996). *Recovering Probability Distributions from Option Prices*. *Journal of Finance*, 51(5), 1611–1631.
- Melick, W. R., & Thomas, C. P. (1997). *Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1), 91–115.
- Merton, R. C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Polanitzer, R. (2022). *How to Derive the Implied Risk-Neutral Probability Distribution of an Underlying Asset Price from Option Prices*. *Medium*, January.
- Shimko, D. (1993). *Bounds of Probability*. *Risk*, 6(4), 33–37.