אוניברסיטת בן גוריון בנגב

הפקולטה למדעי הרוח והחברה

המחלקה לכלכלה

סמינר בתורת המשחקים וכלכלה מתמטית

קביעת שווי הוגן להקצאות אופציות לעובדים (ESOP's) על פי התקן האמריקאי SFAS123R

שם המרצה: פרופ׳ עזרא עיני.

מגיש: רועי פולניצר, ת.ז. 031113236

תאריך: סמסטר ב׳, תשס״ו.

תקציר

מטרת מאמר זה היא לספק לקורא הבנה טובה יותר באשר לאפליקציות הערכת השווי הנגזרות מהמתודולוגיה המועדפת של תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R, תקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2** והצעה לתקן חשבונאות מספר **24** - מודל הרשת הבינומי (the binomial lattice) - דרך הערכת סיסטמתית ואובייקטיבית של המתודולוגיה והשוואת תוצאותיה למודל Black & Scholes. במאמר נראה כיצד ניתן ליישם באופן מדויק הערכת שווי לצרכי דיווח חשבונאי על פי התקנים האמורים לעיל. הניתוח בוצע באמצעות מודל הרשת בינומי המותאם אישית (customized) הכולל בחובו משתני הערכה ותנאי מציאות כגון הבשלה (vesting), התנהגות מימוש לא אופטימאלית של עובדים (employee suboptimal exercise behavior), שיעורי חילוט (forfeitures), תקופות חסימה (blackouts) כמו גם משתני הערכה גמישים כגון תשואות דיבידנד, שיעורי ריבית חסרות סיכון וסטיות תקן המשתנים לאורך חיי האופציות לעובדים. המאמר מציג את התפיסה העומדת מאחורי התקן, המיושמת באמצעות מתודולוגיות הערכת שווי שונות (המודל הסגור של Black & Scholes, מודלי רשת בינומיים וסימולציות Monte Carlo) והשפעותיהן על הערכת השווי הכלכלי. בעבודתנו ניתן להיווכח ולראות כי באמצעות המתודולוגיה הנכונה שעדיין מתיישבת עם דרישות התקנים, פוטנציאלית חברות יכולות להגיע למדידת הוצאות מופחתות כל שנה בכך שימנעו מהערכת היתר הלא הכרחית של מודל Black & Scholes הנאיבי, באמצעות מודל הרשת הבינומי מתוקן ומותאם אישית כך שיביא בחשבון התנהגות מימוש לא אופטימאלית, שיעורי חילוט, תקופת הבשלה, תקופות חסימה, ומשתני הערכה גמישים המשתנים לאורך זמן. בד בבד עם כתיבת המאמר ובמטרה לאמוד את שווים הכלכלי של כתבי האופציות בנינו תוכנה להערכת השווי הכלכלי של כתבי האופציות האמורים, מודלים ואלגוריתמים.

תוכן עניינים

1. מבוא

תחילה נסביר מתי נעזרים במעריכי שווי ומהו IFRS. עד עתה, נדרשה פעילות מעריכי שווי בעיקר בתהליכי מכירת חברות, קנייתן, מיזוג בין חברות, בתהליכי גיוס הון, סכסוכים משפטיים ועסקיים, למטרות מס וכיוצא באלה עסקאות. אולם, תחום הערכות השווי בישראל צפוי לעבור שינויים דרמטיים בעקבות מהפכת "השווי ההוגן" והחלתם הצפויה של תקני חשבונאות בינלאומיים (IFRS – International Financial Reporting Standard) בישראל משנת דיווח 2008 (עם מספרי השוואה לשנת 2007) על החברות הציבוריות המוחזקות על ידן, וכן בשל כניסת גילוי דעת ישראלים בחשבונאות המחייבים את כלל החברות במעבר לבסיס מדידה לפי "שווי הוגן" בנושאים מסוימים.

בשלב הראשון, יחולו תקני ה- IFRS בעיקר על חברות ציבוריות (כולל חברות פרטיות המוחזקות על ידי ציבוריות), אולם בשלב השני תקני ה- IFRS יחולו (בהקלות מסוימות) גם על רוב החברות הפרטיות במשק. זה פשוט "צונאמי" חשבונאי, שמהפכת השווי ההוגן היא רק הגל הראשון, ומי שלא יערך מראש, בצורה יסודית, עלול יהיה לשאת בתוצאות קשות מאוד. כדי להמחיש את נחישות השינוי די לצטט את רשות ניירות ערך שכבר הודיעה, באופן חד משמעי, כי לא יהיו שום הנחות ודחיות, לאף חברה, ביישום התקינה החדשה. גם לשכת רואי החשבון והמוסד הישראלי לתקינה חשבונאית פועלים בנחישות דומה להפעיל את יישום כללי ה- IFRS על כלל החברות במשק ולשנות באופן דרמטי את פני החשבונאות, כפי שהכרנו.

בוא נחזור להתחלה ונסביר מהו למעשה "שווי הוגן" והיכן חברות ישתמשו בו בדיווחיהן הכספיים. בדיווח המושג "שווי הוגן" לקוח מעולם התוכן החשבונאי. "שווי הוגן" (FAIR VALUE) מוגדר כשווי שבו נכס יימכר בעסקה שבין מוכר מרצון וקונה מרצון, כאשר אף צד אינו פועל תחת מגבלה או לחץ, כששני הצדדים פועלים באופן רציונאלי, מכירים באופן סביר את כל העובדות והנסיבות הרלוונטיות וכל צד מבקש להשיא את תועלתו הכלכלית. שווי זה נקבע על ידי שימוש באחת משלוש גישות מרכזיות: גישת ההכנסות/הרווח, גישת העלות וגישת השוק. התיאוריה הכלכלית הקלאסית גורסת, כי שווי הוגן נקבע בשווקים משוכללים בהם האינפורמציה מלאה ועל בסיס עסקה בתהליך של "ממוכר מרצון לקונה מרצון" (At arm's length).

אחד השינויים המשמעותיים ביותר כתוצאה מכניסת תקני ה- IFRS לתוקף יהיה שינוי דרך המדידה של אלמנטים שונים ב"שפה החשבונאית" לבסיס "שווי הוגן", כגון: קביעת שווי הוגן להקצאות אופציות לעובדים (ESOP's- Employee Stock Options Plans). כפי שנידון ובתקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R, בתקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2** ובהצעה לתקן חשבונאות מספר **24**,

הצעה לתקן ישראלי מספר **24** - תשלום מבוסס מניות מבוסס על תקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2** וחל מיום 1 בינואר 2006. התקן חל על מכשירים פיננסיים שהוענקו לאחר יום ה- 15 במרס 2005 (Vested) וטרם הבשילו עד מועד תחולת התקן וכן על שינויים שחלו בתוכניות קיימות.

כתבי האופציה מוענקים ברגיל לעובדים, נושאי משרה ודירקטורים. אולם, היות ולא קיימת אפשרות מעשית למדוד באופן מהימן את השווי ההוגן של השירותים שהתקבלו ויתקבלו מידיהם, נמדד לרוב שווים של כתבי אופציה אלו כנגזרת (אופציה) על בסיס שווים ההוגן של המכשירים ההוניים (מניות) המוענקים, במועד ההענקה.

קיימות שיטות רבות להערכת שווי אופציות אשר כולן מתבססות על אותה מתודולוגיה של רציפות או קירוב לרציפות כגון מודל Black & Scholes, המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein (כגון C-R-R), המודל התרינומי של Boyle, סימולציית Monte Carlo ושיטות נומריות שונות מהסוג המכונה Finite Difference Method.

אם כך נשאלת השאלה מהם בעצם ההבדלים בין העקרונות החשבונאיים שהיו נהוגים עד כה לבין העקרונות החשבונאיים שחלים על חברות ציבוריות עם החלת כללי ה- IFRS? התשובה לכך היא שהחשבונאות פעלה תמיד באופן מסורתי על פי מספר שיקולים שאחד המהותיים שבהם הוא שיקול הרלוונטיות, כלומר: על הדו"חות הכספיים להיות רלוונטיים למשתמשי הדו"חות. אולם, המרחק הגובר בין שוויון של חברות המשתקף בשוקי ניירות הערך השונים, לעומת ההון העצמי החשבונאי יצר איום קשה על רלוונטיות הדו"חות, דבר שאף עולה ממחקרים רבים. למעשה שוויים של נכסים רבים אינו נכלל בדו"חות הכספיים (במגזרי פעילות מסוימים, אף למעלה מ- 80% מסך שווי החברה אינו כלול בנכסים "נטו", בהם הכירה החשבונאות).

שיקולים נוספים שעל בסיסם פועלת החשבונאות הם שיקולי השוואתיות ומהימנות. כלומר: על הדו"חות הכספיים להיות "השוואתיים" באופן שעסקה דומה תרשם באופן דומה בחברות שונות או באותה חברה ובזמנים שונים. כמו כן על הדו"חות להיערך באופן ועל בסיס נתונים מהימנים, כך שרואה החשבון המבקר או גופים מפקחים אחרים יוכלו לבחון את נאותות הנתונים, ההנחות והשיקולים שבבסיס הדיווח, בין היתר באמצעות "עקבות ביקורת" ו"ראיות" מסוגים שונים לנתונים ולשיקולים שנכללו במהלך הכנת הדו"חות.

החשבונאות פעלה על פי שיקולים אלה במשך שנים רבות, כפי שבא לידי ביטוי בהעדפת עקרון "העלות ההיסטורית" על פני עקרון "השווי ההוגן", תוך העדפת שיקולי המהימנות והשוואתיות אך במחיר קשה של אבדן רלוונטיות מתגבר. שינוי משמעותי זה של הכללת נכסים והתחייבויות ב"שוויים ההוגן", נובע ללא ספק מהצורך להחזיר לחשבונאות ולדו"חות הכספיים את מעמדם כבעלי אינפורמציה רלוונטית לשוק. אולם אין ספק, כי שינוי זה פירושו גם הענקת משקל רב לשיקול הרלוונטיות שבבסיס הדו"חות הכספיים על חשבון פגיעה קשה אפשרית במשקלם של שיקולי ההשוואתיות והמהימנות.

אחד מתחומי ה- Corporate Valuation הוא הערכת שווי הוגן (Fair-Market-Value) של אופציות לעובדים (ESOs- Employee Stock Options). מודל הרשת הבינומי (Binomial Lattice) הוא השיטה המועדפת על פי דרישות התקנים הבאים: בתקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R, תקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2** ובהצעה לתקן חשבונאות מספר **24**, אולם, המבקרים טוענים כי לחברות אין בהכרח את המשאבים הנחוצים או זמינות נתונים לקיום תהליך קביעת שווי "פנימי" (in-house) במקרים בהם מהותיות הפריט גבוהה או לחילופין מורכבות הפריט רבה או לחילופי חילופין מידת שיקול הדעת בקביעת השווי גבוהה לא קיימים נתוני התייחסות (Reference) מוצקים/טכניים ברורים (כגון: ציטוטים או מחירי מניות בשוק פעיל) וכיוב'. לאמור- ספק אם לחברות יש את

היכולת לבצע הערכות שווי מורכבות, כאלו שיהיו גם עקביות עם הדרישות החדשות וגם שיוכלו לעבור ביקורת חיצונית.

מודל Black & Scholes, אף על פי שהוא אלגנטי ונכון מבחינה תיאורטית, הוא בלתי מספיק ומבחינה מעשית אף לא מתאים כאשר הוא בא לכמת את השווי ההוגן של אופציות לעובדים. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שמודל Black & Scholes ישים אך ורק עבור אופציות אירופאיות ללא דיבידנד, כאשר מחזיק האופציה יכול לממש את האופציה במועד הפקיעה בלבד ומניית הבסיס אינה מחלקת דיבידנד.[1] בכל אופן, במציאות, מרבית האופציות לעובדים הינן אופציות אמריקאיות[2] עם דיבידנד, כאשר מחזיק האופציה יכול לממש את האופציה בכל עת עד למועד הפקיעה ומניית הבסיס מחלקת דיבידנד. בנוסף, בתנאי המציאות (real-life conditions), לאופציות לעובדים יש תקופת הבשלה (vesting) בטרם העובד יכול לממש את האופציה, אשר יכול שתהיה תלויה בכך שהחברה ו/או העובד יגיעו לרמת ביצועים מוגדרת (למשל רווחיות, שיעור צמיחה או מחיר מניה הנוגע בחסם מינימאלי כלשהו בטרם האופציה "מתעוררת לחיים"). כמו כן, האופציות לעובדים נתונות לחילוטים (forfeitures) כאשר העובדים עוזבים מרצון את החברה או מפוטרים לפני ההגעה לתקופת ההבשלה. נציין עוד כי אופציות מסוימות מוענקות במנות (tranches) או ע"פ יעדים מוגדרים (graduated scale), כאשר אחוז מסוים מהאופציות המוענקות הופך בר-מימוש כל שנה.[3] אשר על כן, עובדים מפגינים התנהגות מימוש (exercise behavior) לא יציבה כאשר האופציה תמומש רק אם היא תעלה מעל למכפיל מסוים של תוספת מחיר המימוש, המכונה בשם מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית (suboptimal exercise behavior multiple). בהמשך, ערך האופציה יכול שיהיה רגיש לסביבה הכלכלית הצפויה, המאופיינת ע"י המבנה העתי של שערי הריבית (דהיינו, שיעורי התשואה לפדיון המבוססים על עקום תשואות נומינלי/ריאלי חסר סיכון בישראל) כאשר שיעור הריבית חסרת הסיכון משתנה במשך חיי האופציה. לבסוף, החברה יכולה לעבור דיספוזיציות מבניות שונות (למשל, מיזוגים, פיצולים, רכישות, תהליכי מכירה ושינויים מבניים אחרים העשויים לדרוש סווף מניות המשנה את התנודתיות של מניית הבסיס). כל התרחישים המציאותיים הללו הופכים את מודל Black & Scholes לבלתי מספיק ובלתי מתאים כאשר נעשה בו שימוש לקביעת שווי הוגן הקצאת אופציות לעובדים.[4] לסיכום, חברות יכולות ליישם מגוון של התאמות המשפיעות על שוויים ההוגן של האופציות כאשר הרשימה המונחת לעיל מכילה רק מספר דוגמאות. מודלים סגורים (closed-form models) כמו מודל Black & Scholes או מודל Black & Scholes הכללי – האחרון לוקח בחשבון תשואות דיבידנד – אינם גמישים ואינם ניתנים לתקנון על מנת שיתאימו את עצמם לתנאי המציאות הללו. על כן, גישת מודל הרשת הבינומי היא המועדפת.

[1] מודל Black & Scholes כללי מביא בחשבון דיבידנד עבור אופציות אירופאיות בעוד שמודל Black & Scholes אינו מביא בחשבון חלוקת דיבידנד אפשרית.

[2] אופציות אמריקאיות ניתנות למימוש בכל עת עד למועד הפקיעה. אופציות אירופאיות ניתנות למימוש במועד הפקיעה בלבד. רוב כתבי האופציות לעובדים הינן שילוב של השניים- קרי, אופציה אירופאית במהלך תקופת ההבשלה (האופציה אינה ניתנת למימוש קודם להבשלה) והופכת לאופציה אמריקאית לאחר תקופת ההבשלה.

[3] יכול שתהיה תקופת הבשלה (כל האופציות מבוטלות אם העובד עוזב או מפוטר לפני סיום תקופת ההבשלה) או מענקים במנות חודשיות/רבעוניות/שנתיות (אחוז מסוים מתוך האופציות מבשיל לאחר תקופה מוגדרת של שירותי עבודה עבור החברה).

[4] מודל Black & Scholes המתואר במאמר זה הינו המודל המקורי שפותח ע"י פישר בלק, מיירון שולס ורוברט מרטון. חרף התקדמות משמעותית שנעשתה כמו למשל בכך שמודל Black & Scholes ניתן לתקנון על מנת שיביא בחשבון חלק מהנושאים האקזוטיים הנידונים במאמר זה, עדיין המודל מורכב מבחינה מתמטית ומאוד לא מעשי לשימוש.

תחת תנאים מאוד ספציפיים (אופציות אירופאיות ללא דיבידנד) גישות מודל הרשת הבינומי וסימולציית Monte Carlo מניבות ערכים זהים למודל Black & Scholes, נציין כי שתי הגישות הקודמות חסינות, איתנות ומדויקות "בגבול" (at the limit, ביטוי מתמטי שפירושו כמעט שם אך לא לגמרי). מכל מקום, כאשר באים למדל תנאי עסקים מציאותיים (כגון הסתברות לחילוט, הסתברות שהעוזבים יעזבו או יפוטרו, תקופת הבשלה, התנהגות מימוש לא אופטימאלית וכיוב'), רק מודל הרשת הבינומי בעל האופי המאוד גמיש יספק את השווי ההוגן האמיתי של האופציות לעובדים. מודל Black & Scholes מביא בחשבון רק את הפרמטרים הבאים: מחיר המניה, מחיר המימוש, הזמן עד לפקיעה, שיעור ריבית חסרת סיכון בודד ותנודתיות בודדת. מודל Black & Scholes הכללי מביא בחשבון את אותם הפרמטרים כמו גם תשואת דיבידנד בודד. על כן, בהתאם לדרישות התקנים המוזכרים לעיל, מודל Black & Scholes ומודל Black & Scholes הכללי לא מצליחים להביא בחשבון תנאי מציאות. מאידך, מודל הרשת הבינומי ניתן להתאמה אישית כך שיכלול בחובו את מחיר המניה, מחיר המימוש, הזמן עד לפקיעה, שיעור ריבית חסרת סיכון בודד ו/או שיעורי ריביות חסרות סיכון המשתנים לאורך זמן, תנודתיות בודדת ו/או סטיות תקן המשתנות לאורך זמן, תשואת דיבידנד ו/או תשואות דיבידנד המשתנות לאורך זמן, בנוסף לכל הפקטורים המציאותיים האחרים כגון: תקופות הבשלה, התנהגות מימוש מוקדם לא אופטימלית, תקופות חסימה (blackout periods), שיעורי חילוט, חסמי מחיר מניה וביצועים וכן התניות אקזוטיות (exotic contingencies) אחרות. נציין כי מודל הרשת הבינומי מתכנס למודל Black & Scholes הכללי אם זונחים את תנאי המציאות שצוינו.

קיימים מספר טיעונים החשובים והמשכנעים לשימוש במודל הרשת הבינומי, נציג את השניים החשובים והמשכנעים ביותר. הראשון הוא כי המוסד לתקינה חשבונאית אמריקאית, ה- FASB (Financial Accounting Standards Board), דורש זאת ומצהיר כי מודל הרשת בינומי הינו השיטה המועדפת להערכת שווי אופציות לעובדים. השני הוא כי מודל הרשת הבינומי מביא באמצעות תנאי מציאות הולמים יותר למדידת הוצאות מופחתות באופן ניכר.

SFAS**123**R[5] קובע לעניין השימוש במודל הרשת הבינומי כי:

" *(…)*

B64. As discussed in paragraphs A10–A17, closed-form models are one acceptable technique for estimating the fair value of employee share options. However, a lattice model (or other valuation technique, such as a Monte Carlo simulation technique, that is not based on a closed-form equation) can accommodate the term structures of risk-free interest rates and expected volatility, as well as expected changes in dividends over an option's contractual term. A lattice model also can accommodate estimates of employees' option exercise patterns and post-vesting employment termination during the option's contractual term, and thereby can more fully reflect the effect of those factors than can an estimate developed using a closed-form model and a single weighted-average expected life of the options.

[5]Statement of financial Accounting Standards No.123: Share-Based Payment (revised 2004) paragraphs No. A15-A28.

A15. The Black-Scholes-Merton formula assumes that option exercises occur at the end of an option's contractual term, and that expected volatility, expected dividends, and risk-free interest rates are constant over the option's term. If used to estimate the fair value of instruments in the scope of this Statement, the Black-Scholes-Merton formula must be adjusted to take account of certain characteristics of employee share options and similar instruments that are not consistent with the model's assumptions (for example, the ability to exercise before the end of the option's contractual term). Because of the nature of the formula, those adjustments take the form of weighted average assumptions about those characteristics. <u>In contrast, a lattice model can be designed to accommodate dynamic assumptions of expected volatility and dividends over the option's contractual term, and estimates of expected option exercise patterns during the option's contractual term, including the effect of blackout periods. Therefore, the design of a lattice model more fully reflects the substantive characteristics of a particular employee share option or similar instrument.</u> Nevertheless, both a lattice model and the Black-Scholes-Merton formula, as well as other valuation techniques that meet the requirements in paragraph A8, can provide a fair value estimate that is consistent with the measurement objective and fair-value-based method of this Statement.

A27. However, if an entity uses a lattice model that has been modified to take into account an option's contractual term and employees' expected exercise and post-vesting employment termination behavior, the expected term is estimated based on the resulting output of the lattice. For example, an entity's experience might indicate that option holders tend to exercise their options when the share price reaches 200 percent of the exercise price. If so, that entity might use a lattice model that assumes exercise of the option at each node along each share price path in a lattice at which the early exercise expectation is met, provided that the option is vested and exercisable at that point. Moreover, such a model would assume exercise at the end of the contractual term on price paths along which the exercise expectation is not met but the options are in-the-money at the end of the contractual term. <u>That method recognizes that employees' exercise behavior is correlated with the price of the underlying share. Employees' expected post-vesting employment termination behavior also would be factored in. Expected term, which is a required disclosure (paragraph A240), then could be estimated based on the output of the resulting lattice.</u>

למעשה, חלקים מסוימים מתוך הדרישות הסופיות של **SFAS123R** אינן ניתנים למידול באמצעות המודל המסורתי של Black & Scholes ועל כן נדרש מודל רשת על מנת למדל פריטים כגון מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית, שיעורי חילוט, תקופות הבשלה, תקופות חסימה וכו׳. המאמר הנ״ל והתוכנה המשמשת לחישוב התוצאות, יעשו שימוש הן במודל הרשת הבינומי כמו גם במודלים סגורים כמו Black & Scholes לחישוב התוצאות. הפסקאות הספציפיות המתארות מה כולל השימוש במודלי רשת :

A27. However, if an entity uses a lattice model that has been modified to take into account an option's contractual term and employees' expected exercise and post-vesting employment termination behavior, the expected term is estimated based on the resulting output of the lattice. For example, an entity's experience might indicate that option holders tend to exercise their options when the share price reaches 200 percent of the exercise price. If so, that entity might use a lattice model that assumes exercise of the option at each node along each share price path in a lattice at which the early exercise expectation is met, provided that the option is vested and exercisable at that point.

A28. Other factors that may affect expectations about employees' exercise and post-vesting employment termination behavior include the following:

a. The vesting period of the award. An option's expected term must at least include the vesting period.

b. Employees' historical exercise and post-vesting employment termination behavior for similar grants.

c. Expected volatility of the price of the underlying share.

d. Blackout periods and other coexisting arrangements such as agreements that allow for exercise to automatically occur during blackout periods if certain conditions are satisfied.

e. Employees' ages, lengths of service, and home jurisdictions (that is, domestic or foreign).

על כן, בהתבסס על ההצדקות לעיל, ובתאם לדרישות ולהמלצות שנקבעו ע״י **SFAS123R**, אשר מתייחסות למודל הרשת הבינומי, הרי שהמסקנה להלן הינה שמודל הרשת הבינומי המותאם אישית (customized) הוא המתודולוגיה הטובה ביותר והמועדפת להערכת שווי הוגן של אופציות לעובדים.

2. אופציות לעובדים

כתבי אופציות לעובדים הינם אופציות Call המונפקות על ידי החברה, כאשר נכס הבסיס הינו מניית החברה. לעיתים קרובות, כתבי האופציות לעובדים מוענקים "בכסף" לתקופות של עד עשר שנים. נסביר כי לכתבי אופציות לעובדים ישנם כמה מאפיינים המבדילים אותם מאלו הנסחרות בשוק המעו"ף. ראשית, ישנה תקופת הבשלה (vesting period) כאשר במהלכה האופציות אינן ניתנות למימוש. שנית, כאשר עובדים עוזבים את החברה במהלך תקופת ההבשלה - האופציות מבוטלות (forfeited). כמו כן, כאשר עובדים עוזבים את החברה לאחר תקופת ההבשלה, או אז אופציות "בכסף" ממומשות ואופציות "מחוץ לכסף" מחולטות. שלישית, העובדים אינם מורשים למכור את האופציות שהוענקו להם. רביעית, כאשר כתבי האופציות לעובדים ממומשים החברה מנפיקה בגינם מניות חדשות.

מכאן עולה כי על מנת "להיפגש עם כסף" או "לראות כסף" מכתבי האופציות לעובדים, על העובדים לממש את האופציות ולמכור את נכס הבסיס, קרי את מניות החברה. נזכיר עוד כי כתבי אופציות לעובדים, על פי רוב, ממומשים מוקדם גם במקרים שבהם מניית החברה אינה מחלקת דיבידנד (שלא כמו באופציית Call רגילה). כמובן שלכתבי אופציות לעובדים ישנם גם חסרונות. כתבי אופציות לעובדים גורמים לכך ש: 1) הרווח למנהלים מביצועים טובים גדול יותר מאשר העונש בגין ביצועים גרועים; 2) מנהלים מצליחים כאשר שוק המניות בכללותו עולה, גם אם החברה שלהם מציגה ביצועים נמוכים יחסית; 3) מנהלים מתמקדים בביצועים לטווח קצר על חשבון ביצועים לטווח ארוך; 4) מנהלים מתפתים להכרזות זמן או מקבלים החלטות אחרות הממקסמות את ערכן של האופציות.

כעת נעבור לדבר קצת על חשבונאות. ניתן לחלק את החשבונאות בגין כתבי אופציות לעובדים לשלוש תקופות. הראשונה, עד 1995 העלות של כתב אופציה לעובדים בדו"ח רווח והפסד הייתה שווה לערך הפנימי (intrinsic value) של האופציות ביום ההענקה. השנייה, לאחר 1995 חובה לדווח על "שווי הוגן" (fair value) בדוחות הכספיים (אך השווי ההוגן של ההוצאות בדו"ח רווח והפסד היה אופציונאלי). השלישית, מאז 2005 הן המוסד לתקינה חשבונאית אמריקאית (FASB) והן המוסד לתקינה חשבונאית בינלאומית (IASB) דורשים באמצעות US GAAP ו- IFRS, בהתאמה, לזקוף את השווי ההוגן של האופציות כנגד ההכנסה ביום ההענקה.

נסביר כי המושג "שווי הוגן" לקוח מעולם התוכן החשבונאי. "שווי הוגן" (FAIR VALUE) מוגדר כשווי שבו נכס יימכר בעסקה שבין מוכר מרצון וקונה מרצון, כאשר אף צד אינו פועל תחת מגבלה או לחץ, כששני הצדדים פועלים באופן רציונאלי, מכירים באופן סביר את כל העובדות והנסיבות הרלוונטיות וכל צד מבקש להשיא את תועלתו הכלכלית. שווי זה נקבע על ידי שימוש באחת משלוש גישות מרכזיות: גישת ההכנסות/הרווח, גישת העלות וגישת השוק. התיאוריה הכלכלית הקלאסית גורסת, כי שווי הוגן נקבע בשווקים משוכללים בהם האינפורמציה מלאה ועל בסיס עסקה בתהליך של "ממוכר מרצון לקונה מרצון" (At arm's length).

אחד השינויים המשמעותיים ביותר כתוצאה מכניסת תקני ה- IFRS לתוקף יהיה שינוי דרך המדידה של אלמנטים שונים ב"שפה החשבונאית" לבסיס "שווי הוגן", למשל, שווי הוגן למכשירי הון, כגון מניות בכורה והקצאות אופציות לעובדים (ESOP's), כפי שנידון ובתקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R, בתקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2** ובהצעה לתקן חשבונאות מספר **24**, ועל פי כלל ה- IRS (רשות המס האמריקאית) - **409**A. הצעה לתקן חשבונאות מספר **24** - תשלום מבוסס מניות מבוססת על תקן בינלאומי IFRS**2**, וחלה מיום 1 בינואר 2006. התקן חל על מכשירים פיננסיים שהוענקו לאחר יום ה- 15 במרס 2005 (Vested) וטרם הבשילו עד מועד תחולת התקן וכן על שינויים שחלו בתוכניות קיימות.

האטרקטיביות של כתבי אופציות לעובדים "בכסף" נעוצה בעובדה שלא נרשמה בגינם כל הוצאה בדו"ח רווח והפסד מאחר והערך הפנימי שלהם היה שווה לאפס ביום המימוש, בעוד שתוכניות אחרות להקצאות אופציות לעובדים כן גרמו להוצאות. כיום, לאחר שתקני החשבונאות השתנו, ישנן חברות השוקלות סוגים שונים של תוכניות הקצאת אופציות לעובדים. נביא כמה דוגמאות לתוכניות לא סטנדרטיות אפשריות. אחת התוכניות היא שתוספת המימוש תהא קשורה למדד מניות כלשהו, כך שמחיר מניית החברה חייב להשיג ביצועים טובים יותר מהמדד על מנת שהאופציות יכנסו ל"תוך הכסף". תוכנית אחרת היא שתוספת המימוש תעלה במסלול שנקבע מראש. תוכנית נוספת היא שהאופציות מבשילות רק אם החברה מגיעה ליעדי רווח מוגדרים.

כתבי האופציה מוענקים ברגיל לעובדים, נושאי משרה ודירקטורים. אולם, היות ולא קיימת אפשרות מעשית למדוד באופן מהימן את השווי ההוגן של השירותים שהתקבלו ויתקבלו מידיהם, נמדד לרוב שווים של כתבי אופציה אלו כנגזרת על בסיס שווים ההוגן של המכשירים ההוניים המוענקים, במועד ההענקה.

קיימים מספר מודלים להערכת שווי אופציות אשר ניתן לחלקם לשתי קבוצות: מודלים סגורים Closed-Form (Models) אשר הידוע בהם הינו מודל Black & Scholes ומודלי רשת (Lattice Models) כגון: המודל הבינומי, המודל התרינומי וכדומה.

בראש המודלים הסגורים עומד מודל Black & Scholes, אשר פותח ע"י Fisher Black, Myron Scholes ו- Robert Merton ופורסם לראשונה בשנת 1973, הינו המודל הנפוץ והמקובל ביותר לתמחור אופציות. יתרונו הגדול של המודל הינו בעובדה שהינו פשוט ונוח לשימוש. מאידך, הנוסחא קשיחה ולכן אינה מאפשרת את שינוי הפרמטרים לאורך התקופה.

מודלי רשת כגון המודל הבינומי ו/או המודל התרינומי הינם גמישים יותר ביחס למודל Black & Scholes כיוון שבנויים בשיטה של "עץ החלטות" ולכן מביאים בחשבון מצבי טבע שונים ומאפשרים שינוי פרמטרים לאורך התקופה כגון: שיעור הריבית, סטיית התקן ו/או השפעת תקופת ההבשלה (Vesting), חילוט לאחר תקופת ההבשלה, מימוש מוקדם של האופציות ועוד. מאידך, מודלי הרשת הינם מסובכים יותר וקשים יותר ליישום ומתאימים כאשר תנאי האופציה "מיוחדים".

במידה והאופציות המוענקות אינן כוללות תקופת הבשלה ו/או חילוט, והינן אופציות פשוטות במהותן, הרי שניתן לבחור ליישם בהערכת שווי האופציות את מודל Black & Scholes. יש לציין כי הצעה לתקן חשבונאות מספר **24** ותקן דיווח כספי בינלאומי **IFRS2** מאפשרים את השימוש במודל זה. בהתאם לנדרש בתקני החשבונאות הרלוונטיים, מודל Black & Scholes מביא בחשבון שישה משתנים אשר משפיעים על שווי האופציות, כדלקמן:

- מחיר המימוש של האופציה;
- המחיר השוטף של מניית הבסיס;
- משך חיי האופציה;
- שער ריבית חסר סיכון;
- תנודתיות (Volatility)/ סטית התקן של תשואת המניה;
- שיעור הדיבידנד הצפוי;

לצורך הערכת שווי האופציות, יש להתייחס לכל אחד מהרכיבים הבאים כמפורט לעיל.

מודל Black & Scholes בדומה לרוב המודלים להערכת אופציות, מבוסס על ההנחה שניתן לסחור באופציות בכל עת ולמכרן בכל עת ללא עלויות מהותיות. שווי נכס סחיר גבוה מהשווי של אותו נכס שאינו סחיר, שכן הסחירות מאפשרת לממש את הנכס באופן מיידי. עובדה זו באה לידי ביטוי בין השאר בכך שנכסים לא סחירים אינם יכולים להוות בטחונות להלוואות בנקאיות ומגופי מימון אחרים (שלא כמו מניות רגילות המהוות בטחונות).

אופציות לעובדים הינן חסרות סחירות לחלוטין, כלומר העובדים לא יוכלו לסחור בהן לכל אורך תקופת חייהן ובנוסף הן חסומות לפרק זמן של כשנתיים עד ארבע שנים במהלכן העובדים אינם יכולים לממשן. כלומר, האופציות שמקבלים העובדים הן נכס בלתי נזיל ובלתי סחיר לחלוטין, שכן לא ניתן להעבירן או לממשן במשך תקופה של כשנתיים עד ארבע שנים הראשונות. לאחר מכן הן נכס בעלות סחירות מוגבלת, שכן ניתן לממשן אך לא לסחור בהן.

על פי פרשנות רשות ני״ע בישראל להצעה לתקן חשבונאות מספר **24** ולתקן דיווח כספי בינלאומי **IFRS2** אין לבצע כל ניכיון בגין אי סחירות או חסימה של אופציות לעובדים. לאור זאת, יש להתעלם במודל מהשפעות החסימה ואי הסחירות.

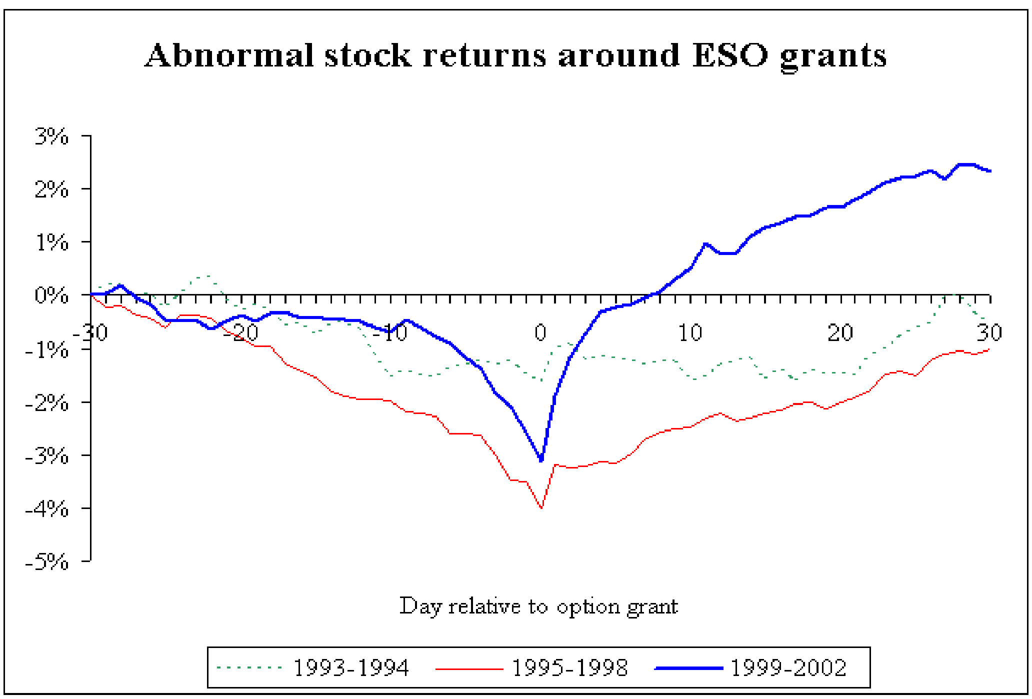
כאמור לעיל, להערכת שווי הרכיבים ההוניים בחברה ניתן: 1) להשתמש במודל Black & Scholes עם זמן פקיעה השווה לאומדן אורך החיים הצפוי; 2) לאמוד את ההסתברות למימוש כפונקציה של מחיר המניה ומשך החיים שנותר. לאמור- להשתמש במודל הבינומי לפי כללי ה״אינדוקציה לאחור״ המשקפים את ההסתברויות שהוזכרו; 3) להניח כי האופציה ממומשת כאשר מחיר המניה מגיע למכפיל מסוים של תוספת המימוש. 4) להשתמש במכרז על מנת לקבוע את המחיר. גישת המכרז (The Auction Approach) קצת פחות מוכרת בארץ ועל כן ניתן דוגמא בעניין.

הדוגמה המוכרת ביותר היא Zions Bancorp שמכר בשוק, במכירה פומבית, אופציות אשר תזרים המזומנים בגינן משקף את תזרים המזומנים של העובדים מכתבי האופציות שבידיהם. כך למשל, אם 10% מכתבי האופציות לעובדים ממומשים בשנה השלישית, או אז בעלי האופציות שנמכרו במכרז מקבלים תזרים המזומנים בגובה 10% מהחזקותיהם השווה לערך הפנימי בשנה השלישית.

כתבי אופציות לעובדים גורמים לדילול האינטרסים של בעלי המניות מאחר ומניות חדשות נרכשות במחיר הנמוך ממחיר השוק. מכל מקום, הדילול מתרחש ברגע שהשוק שומע על הענקת האופציות. לאמור- הדילול אינו מתרחש כאשר האופציות ממומשות. נשאלת השאלה האם ערכי השוק מגלמים או לא מגלמים? לצורך כך נגדיר שני מונחים: שווי שוק מגלם, קרי, ערכי השוק משקפים את כל המכשירים המרכיבים את ההון של החברה, כלומר, מחיר המניה בשוק הינו לאחר ניכויי חלקם של כל הנגזרים ומשקף את מחיר ההון העצמי של בעלי המניות בלבד. מאידך, שווי שוק לא מגלם, דהיינו, ערכי השוק אינם משקפים את כל המכשירים המרכיבים את ההון של החברה. הווה אומר: בכדי לחשב את ההון העצמי של בעלי המניות יש ל"נכות" משווי המניה את שוויים של הנגזרים. נסכם ונאמר כי סביר להניח כי ערכי השוק מגלמים את שווי הנגזרים. לאור זאת, נהוג להניח כי שווי השוק מגלם את כתבי האופציה לציבור והאג"ח להמרה. הוא הדין לגבי כתבי אופציות לעובדים שכן נכון ליום ההערכה ידע השוק על מתן אופציות אלו.

תיארוך בדיעבד (Backdating) היא תופעה נפוצה מאוד בארה"ב. למשל, חברה יכולה לקבל החלטה להעניק כתבי אופציות לעובדים "בכסף" ביום ה- 30 באפריל כאשר מחיר המניה הוא $50 ולאחר מכן לתארך בדיעבד את יום ההענקה ל- 3 באפריל כאשר מחיר המניה היה $42.

להלן גרף מתוך מחקר אקדמי החושף Backdating:



המקור: **www.biz.uiowa.edu/faculty/elie/backdating.htm**.

3. חסרונותיו של מודל Black & Scholes

המושג "שווי הוגן" לקוח מעולם התוכן החשבונאי. "שווי הוגן" (FAIR VALUE) מוגדר כשווי שבו נכס יימכר בעסקה שבין מוכר מרצון וקונה מרצון, כאשר אף צד אינו פועל תחת מגבלה או לחץ, כששני הצדדים פועלים באופן רציונאלי, מכירים באופן סביר את כל העובדות והנסיבות הרלוונטיות וכל צד מבקש להשיא את תועלתו הכלכלית. שווי זה נקבע על ידי שימוש באחת משלוש גישות מרכזיות: גישת ההכנסות/הרווח, גישת העלות וגישת השוק. התיאוריה הכלכלית הקלאסית גורסת, כי שווי הוגן נקבע בשווקים משוכללים בהם האינפורמציה מלאה ועל בסיס עסקה בתהליך של "ממוכר מרצון לקונה מרצון" (At arm's length).

אחד השינויים המשמעותיים ביותר כתוצאה מכניסת תקני ה-IFRS לתוקף הינו שינוי דרך המדידה של אלמנטים שונים ב"שפה החשבונאית" לבסיס "שווי הוגן", כגון קביעת שווי הוגן למכשירים (נכסים והתחייבויות) פיננסיים (כגון מניות, ניירות ערך, איגרות חוב, אופציות וכו') ונגזרים משובצים (הכוונה למכשיר, כגון חוזה, הכולל מספר חוזים נפרדים המשובצים יחדיו (Embedded). לדוגמה, חוזה שכירות משרדים פשוט הנקוב בדולר לחברה ישראלית, יפורק לחוזה שכירות שקלי ולהחזקה בחוזה עתידי מסוג FORWARD על הדולר, שיש להציגו בשווי הוגן כפי שנידון בתקן חשבונאות ישראלי מספר **22**, בתקני חשבונאות בינלאומיים IAS**32** ו- IAS**39**, בתקני חשבונאות אמריקאיים SFAS**157** ו- SFAS**133** ובתקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**7**.

SFAS**157**[6] קובע לעניין Fair Value Hierarchy כי:

" *(…)*

21. In this Statement, inputs refer broadly to the assumptions that market participants would use in pricing the asset or liability, including assumptions about risk, for example, the risk inherent in a particular valuation technique used to measure fair value (such as a pricing model) and/or the risk inherent in the inputs to the valuation technique. Inputs may be observable or unobservable:

a. Observable inputs are inputs that reflect the assumptions market participants would use in pricing the asset or liability developed based on market data obtained from sources independent of the reporting entity.

b. unobservable inputs are inputs that reflect the reporting entity's own assumptions about the assumptions market participants would use in pricing the asset or liability developed based on the best information available in the circumstances.

[6] Statement of financial Accounting Standards No.157: Fair Value Measurement (September 2006) paragraphs No. 22-30.

Valuation techniques used to measure fair value shall maximize the use of observable inputs and minimize the use of unobservable inputs. (…)"

22. To increase consistency and comparability in fair value measurements and related disclosures, the fair value hierarchy prioritizes the inputs to valuation techniques used to measure fair value into three broad levels. The fair value hierarchy gives the highest priority to quoted prices (unadjusted) in active markets for identical assets or liabilities (Level 1) and the lowest priority to unobservable inputs (Level 3). In some cases, the inputs used to measure fair value might fall in different levels of the fair value hierarchy. The level in the fair value hierarchy within which the fair value measurement in its entirety falls shall be determined based on the lowest level input that is significant to the fair value measurement in its entirety. Assessing the significance of a particular input to the fair value measurement in its entirety requires judgment, considering factors specific to the asset or liability.

מדרג שווי ראשון, הגבוה בהירככיה, הינו מחיר מצוטט בשוק פעיל לאמור :

24. Level 1 inputs are quoted prices (unadjusted) in active markets for identical assets or liabilities that the reporting entity has the ability to access at the measurement date. An active market for the asset or liability is a market in which transactions for the asset or liability occur with sufficient frequency and volume to provide pricing information on an ongoing basis. A quoted price in an active market provides the most reliable evidence of fair value and shall be used to measure fair value whenever available, except as discussed in paragraphs 25 and 26.

מאחר וכתבי אופציה לעובדים אינם רשומים למסחר, מדרג שווי שני הינם נתונים המשתמעים באופן ישיר או עקיף מנתוני שוק הנצפים באופן ישיר או עקיף, כדלקמן :

28. Level 2 inputs are inputs other than quoted prices included within Level 1 that are observable for the asset or liability, either directly or indirectly. If the asset or liability has a specified (contractual) term, a Level 2 input must be observable for substantially the full term of the asset or liability. Level 2 inputs include the following:

a. Quoted prices for similar assets or liabilities in active markets *b.* *Quoted prices for identical or similar assets or liabilities in markets that are not active, that is, markets in which there are few transactions for the asset or liability, the prices are not current, or price quotations vary substantially either over time or among market makers (for example, some brokered markets), or in which little information is released publicly (for example, a principal-to-principal market)*

c. *Inputs other than quoted prices that are observable for the asset or liability (for example, interest rates and yield curves observable at commonly quoted intervals, volatilities, prepayment speeds, loss severities, credit risks, and default rates)*

d. *Inputs that are derived principally from or corroborated by observable market data by correlation or other means (market-corroborated inputs).*

29. *Adjustments to Level 2 inputs will vary depending on factors specific to the asset or liability. Those factors include the condition and/or location of the asset or liability, the extent to which the inputs relate to items that are comparable to the asset or liability, and the volume and level of activity in the markets within which the inputs are observed. An adjustment that is significant to the fair value measurement in its entirety might render the measurement a Level 3 measurement, depending on the level in the fair value hierarchy within which the inputs used to determine the adjustment fall. .*

נתוני מדרג שווי שלישי הינם תוצאות חישובי מודלים שונים, המשתמעים וניתנים ליישום באופן ישיר או עקיף חלף נתוני שוק הנצפים באופן ישיר או עקיף, כדלקמן:

30. *Level 3 inputs are unobservable inputs for the asset or liability. Unobservable inputs shall be used to measure fair value to the extent that observable inputs are not available, thereby allowing for situations in which there is little, if any, market activity for the asset or liability at the measurement date. However, the fair value measurement objective remains the same, that is, an exit price from the perspective of a market participant that holds the asset or owes the liability. Therefore, unobservable inputs shall reflect the reporting entity's own assumptions about the assumptions that market participants would use in pricing the asset or liability (including assumptions about risk). Unobservable inputs shall be developed based on the best information available in the circumstances, which might include the reporting entity's own data. In developing unobservable inputs, the reporting entity need not undertake all possible efforts to obtain information about market participant assumptions. However, the reporting entity shall not ignore information about market participant assumptions that is reasonably* *available without undue cost and effort. Therefore, the reporting entity's own data used to develop unobservable inputs shall be adjusted if information is reasonably available without undue cost and effort that indicates that market participants would use different assumptions. Inputs Based on Bid and Ask Prices."*

בעבודה יש לבחון את נתוני החברה וניירות הערך שלה על בסיס מדרגי השווי האמור והמפורט לעיל. מאחר והשווי הכולל של כ אינו מצוטט בשוק פעיל ובהיעדר ציטוט למחיר אופציה בעלת מאפיינים דומים לאופציות לעובדים, יש לאמוד את השווי הכלכלי של כתבי אופציות לעובדים על בסיס מדרג השווי השלישי המשלב שימוש במודלים מימוניים, בנתוני חברות מדגם, בנתוני שוק ועל בסיס הנחות יסוד מסוימות. שינוי בהנחות יסוד אלו צפוי לשנות את תוצאות הערכתנו באופן מהותי.

סעיף **48**A ל- IAS**39**, קובע לעניין מדרג השווי כי :

"…The best evidence of fair value is quoted prices in an active market. If the market for a financial instrument is not active, an entity establishes fair value by using a valuation technique. The objective of using a valuation technique is to establish what the transaction price would have been on the measurement date in an arm's length exchange motivated by normal business considerations. Valuation techniques include using recent arm's length market transactions between knowledgeable, willing parties, if available, reference to the current fair value of another instrument that is substantially the same, discounted cash flow analysis and option pricing models…"

קיימות שיטות רבות להערכת שווי אופציות אשר כולן מתבססות על מתודולוגיה דומה (רציפות או קירוב לרציפות) כגון מודל Black & Scholes, המודל הבינומי של Cox , Ross & Rubinstein (C-R-R), המודל התרינומי של Boyle, מודל Monte Carlo וכן שיטות נומריות מהסוג המכונה Finite Difference Method. במידה והאופציות ניתנות למימוש בכל יום על פני משך חיי האופציה (אופציה אמריקאית), קיימת סבירות למימוש מוקדם של האופציה לאורך משך חיי האיגרת. לפיכך, המתודולוגיה בה יש להשתמש לצורך הערכת שווי רכיב ההמרה הינה שימוש במודל הבינומי (100.5 איטרציות).

תקן חשבונאות בינלאומי IAS**39** קובע כי יש לשערך נגזרים פיננסיים (לרבות אופציות) לפי שוויים ההוגן וזאת מול רווח והפסד/קרן הון. על פי התקן, כאשר קיים שוק פעיל, השערוך נדרש להתבצע בהתאם למחיר בשוק. כאשר אין שוק פעיל השערוך יתבצע, בדרך כלל, לפי מודלים לתמחור נגזרים. המודל הפופולארי ביותר לתמחור אופציות הינו מודל Black & Scholes. המודל פורסם במהלך השנים 1973-1974, ונחשב כפורץ דרך בתחום תמחור האופציות. המודל השפיע באופן מהותי על האופן שבו הסוחרים בשווקים תמחרו את האופציות וגידרו את הסיכונים.

נוסחת Black & Scholes מחשבת את שווי האופציה כפונקציה של חמישה פרמטרים: 1) מחיר נכס הבסיס - S; 2) מחיר המימוש – X; 3) הזמן למימוש – T; 4) שיעור הריבית חסרת הסיכון הרציפה – r; התנודתיות הצפויה לנכס הבסיס - σ.

שווי אופציית Call הינו:

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2)$$

N(d) הינה פונקצית ההסתברות המצטברת תחת הנחה של ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית. למעשה השימוש בפונקצית ההסתברות הינו התחליף לשימוש בהסתברויות Q ו- (1-Q) במודל הבינומי.

להלן ההגדרות של d_1 ו- d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

לצורך הדוגמא, נניח אופציית רכש אירופאית (ניתנת למימוש רק במועד הפקיעה) שתפקע בעוד כחצי שנה, כאשר מחיר נכס הבסיס (S) הוא 42 ₪, מחיר המימוש (X) הוא 40 ₪, הזמן למימוש (T) הוא 0.5 שנים, שיעור הריבית חסרת הסיכון הרציפה (r) היא 10% (בחישוב שנתי) והתנודתיות הצפויה לנכס הבסיס (σ) היא 20% (בחישוב שנתי).

תחילה נחשב את d_1 ו- d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{42}{40}\right) + \left(0.1 + \frac{0.2^2}{2}\right) \cdot 0.5}{0.2 \cdot \sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2 = 0.7693 - 0.2 \cdot \sqrt{0.5} = 0.6278$$

$$X \cdot e^{-r \cdot T} = 40 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.5} = 38.049$$

$$C = 42 \cdot N(0.7693) - 38.049 \cdot N(0.6278) = 4.76$$

אם האופציה הייתה אופציית Put היינו מקבלים את התוצאה הבאה:

$$P = X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$
$$P = 38.049 \cdot N(-0.6278) - 42 \cdot N(-0.7693) = 0.81$$

כפי שצוין מודל Black & Scholes הינו מודל נפלא שהביא לפריצת דרך, אולם הגדרתית המודל מיועד לתמחור אופציות אירופאיות עם מועד מימוש אחד בסוף התקופה. מכאן עולה השאלה, האם המודל מתאים לתמחור אופציות אמריקאיות.

באופן עקרוני המודל אינו מתאים לתמחור אופציות אמריקאיות וזאת פרט למקרה בודד של אופציות רכש (Call) אמריקאית עם מחיר מימוש קבוע והמניה אינה משלמת דיבידנדים. כאשר מחיר המימוש קבוע והמניה אינה משלמת דיבידנדים אזי שווי אופציית Call אמריקאית זהה לשווי אופציה אירופאית. וזאת מכיוון שמחזיק האופציה יעדיף להחזיק באופציה עד סוף התקופה ולא לממשה בטרם עת.

כעת ננסה לנתח את ההיגיון הכלכלי הנ"ל: ההפרש הנוכחי בין מחיר המניה למחיר המימוש הינו S-K. על פי המודלים המקובלים לתמחור אופציה, מחיר הנכס בעתיד הינו (בתוחלת) מחיר הנכס כיום בתוספת ריבית חסרת סיכון. בהנחה שבכל מצבי הטבע העתידיים מחיר המניה יהיה גבוה ממחיר המימוש אזי תוחלת ההפרש העתידי הינה S*(1+R)-K ואם נהוון את הערך העתידי להיום נקבל:

$$S - \frac{X}{(1+r)} > S - X$$

ניתן לראות שעדיף להמשיך ולהחזיק באופציה עד סוף התקופה. הניתוח הכלכלי שביצענו מתבסס על ההנחה שבכל מצבי הטבע מחיר המניה העתידי יהיה גבוה ממחיר המימוש. מה קורה כאשר מביאים בחשבון מצבי טבע שבהם מחיר המניה נמוך ממחיר המימוש? למעשה ההוכחה רק מתגברת. התוחלת של מחיר המניה העתידי הוא עדיין מחיר המניה הנוכחי בתוספת ריבית חסרת סיכון. אולם, היות וערך אופציה לא יכול להיות שלילי הרי שערך האופציה העתידי יהיה גבוה יותר מההפרש בין תוחלת מחיר המניה העתידי לבין מחיר המימוש. בהתאם לכך גם הערך העתידי המהוון יהיה גבוה מההפרש העתידי המהוון:

$$\frac{FutureOptionValue}{(1+r)} > S - \frac{X}{(1+r)} > S - X$$

במאמר זה נסקור חמש מגבלות של המודל: 1) תמחור אופציות Call אמריקאיות עם מחיר מימוש משתנה; 2) תמחור אופציות Call אמריקאיות כאשר המניה משלמת דיבידנדים; 3) תמחור אופציות Put אמריקאיות; 4) תמחור אופציות שאינן סחירות (אופציות לעובדים); 5) תמחור אג"ח להמרה.

המגבלה הראשונה היא תמחור אופציות Call אמריקאיות עם מחיר מימוש משתנה. בניתוח הקודם ראינו שכאשר מחיר המימוש קבוע כדאי להמשיך ולהחזיק באופציה מכיוון שמחיר המניה צובר (בתוחלת ריבית) ואילו מחיר המימוש אינו צובר ריבית. דהיינו התשלום נשחק.

כעת נוכיח כי כאשר מחיר המימוש משתנה לא תמיד כדאי להחזיק באופציה עד הסוף. נניח כי על פי תנאי האופציה מחיר המימוש צובר ריבית שגבוהה מהריבית חסרת הסיכון.

$$X_1 = X_0 \cdot (1+r) \cdot (1+g)$$

ההפרש בין תוחלת מחיר המניה העתידי לבין מחיר המימוש יעמוד על:

$$S_0 \cdot (1+r) - X_0 \cdot (1+r) \cdot (1+g)$$

הערך המהוון יעמוד על:

$$S_0 - X_0 \cdot (1+g) < S_0 - X_0$$

ניתן לראות שכאשר מחיר המימוש צובר ריבית שגבוהה מהריבית חסרת הסיכון, לא תמיד יהיה כדאי להחזיק באופציה עד הסוף. לעתים יהיה כדאי לממש בשלב מוקדם יותר. לכן מודל Black & Scholes אינו מתאים לאופציה מעין זו.

חשוב להדגיש שתי נקודות. הראשונה כמוזכר לעיל, קיימים מצבי טבע שבהם מחיר המניה העתידי יהיה נמוך ממחיר המימוש העתידי. מדובר בהשפעה מקזזת ולכן לא תמיד כדאי לממש מיידית. השנייה, הניתוח שהוצג חל על כל המקרים עם מחיר מימוש משתנה ולא רק מקרים שבהם מחיר המימוש צובר ריבית ידועה מראש. לעתים מחיר המימוש נקבע כפונקציה של מחיר המניה במועד המימוש בשילוב עם ריצפה מסוימת. הניתוח שהצגנו חל גם על סיטואציות כאלו.

המסקנה המתבקשת היא כי מודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אופציות Call אמריקאיות עם מחיר מימוש משתנה.

המגבלה השנייה היא תמחור אופציות Call אמריקאיות כאשר המניה משלמת דיבידנדים. הניתוח יהיה דומה מאוד לניתוח הקודם. בניתוח הקודם ראינו שמחיר המניה צובר בתוחלת ריבית חסרת סיכון. כעת נניח שמחיר המניה אכן צובר ריבית אבל גם נהיה קטן יותר עקב חלוקת דיבידנדים.

$$E(S_1) = S_0 \cdot (1+r) \cdot (1-q)$$

ההפרש מול מחיר המימוש הינו :

$$S_0 \cdot (1+r) \cdot (1-q) - X$$

על כן, ההפרש המהוון להיום הינו :

$$S \cdot (1-q) - \frac{X}{(1+r)} >=< S - X$$

למעשה ההשפעה של הדיבידנדים אינה ידועה מראש ותלויה. העובדה הברורה היא שלא ניתן להניח מראש שעדיף להחזיק את האופציה. ייתכנו תרחישים בהם יהיה כדאי לממש באופן מיידי. המסקנה המתבקשת היא כי מודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אופציות Call אמריקאיות כאשר המניה משלמת דיבידנדים.

המגבלה השלישית היא תמחור אופציות Put אמריקאיות. הניתוח דומה לניתוחים הקודמים. אנו מניחים שמחיר המניה צובר בתוחלת ריבית חסרת סיכון. ההפרש בין מחיר המימוש לתוחלת מחיר המניה הינו :

$$\frac{X}{(1+r)} - S < X - S$$

ניתן לראות שכאשר מדובר באופציות Put אמריקאיות לא תמיד כדאי לחכות לסוף התקופה. המסקנה המתבקשת היא כי מודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אופציות Put אמריקאיות.
המגבלה הרביעית היא תמחור אופציות שאינן סחירות (אופציות לעובדים). אופציות לעובדים הינן אופציות אמריקאיות. במידה והאופציות אינן מותאמות לדיבידנדים ובהנחה שיחולקו דיבידנדים בעתיד הרי שמודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אופציות אלו.

סוגיה נוספת שיש להתייחס אליה באופציות לעובדים היא חוסר הסחירות של האופציה. מודל Black & Scholes מניח מימוש בסוף התקופה.אולם הנחה זו מבוסס על הנחת בסיס והיא שהאופציה סחירה ותחליף ידיים עד למועד המימוש. אולם כאשר האופציה אינה סחירה יש להביא בחשבון אפשרות שהעובדים, מסיבות שונות, יעדיפו שלא להחזיק את האופציות עד מועד הפקיעה, ובאין אפשרות למכור את האופציות, יבחרו לממש את האופציות.

על כן כאשר בוחרים לעשות שימוש במודל Black & Scholes באופציות לעובדים אין לעשות שימוש באורך החיים החוזי עד למועד הפקיעה אלא יש לעשות שימוש באורך החיים הצפוי עד למימוש. המסקנה המתבקשת היא כי מודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אופציות שאינן סחירות (אופציות לעובדים).

המגבלה הרביעית היא תמחור <u>אג״ח להמרה.</u> כעת נדון בתמחור רכיב ההמרה הגלום באג״ח להמרה (נקרא גם מרכיב האופציה באג״ח להמרה). על פי תקן חשבונאות בינלאומי IAS**39** חברה אשר הנפיקה אג״ח להמרה צמוד למדד

נדרשת להפריד את רכיב ההמרה מהאג"ח ולשערך אותו לפי שוויו ההוגן אל מול רווח והפסד. נציין כי קיימת נטייה פופולארית לתמחר את רכיב ההמרה לפי מודל Black & Scholes.

לדוגמא, אם אג"ח להמרה נפדה בחמישה תשלומים אזי הנטייה היא לתמחר את רכיב ההמרה כסכום של חמישה אופציות כאשר מחיר המימוש בכל אופציה זהה לסכום הערך הנקוב שצפוי להיפדות בכל תשלום. למשל, נניח 100 ערך נקוב שייפדה בחמישה תשלומים, כאשר כל 1 ערך נקוב זכאי למניה אחת ומחיר מניה 2 ₪. הנטייה היא לתמחר את הסכום של חמש אופציות כאשר תקופה של כל אופציה תואמת את מועד הפדיון. קרי, מחיר נכס הבסיס בנקודת האפס הוא 40 $(=100\cdot 0.2\cdot 2)$ ומחיר המימוש בכל אופציה הוא 20 $(=100\cdot 0.2)$. למעשה, הגישה הנ"ל אינה נכונה ואינה תואמת את המאפיינים הכלכליים והמשפטיים של איגרת החוב:

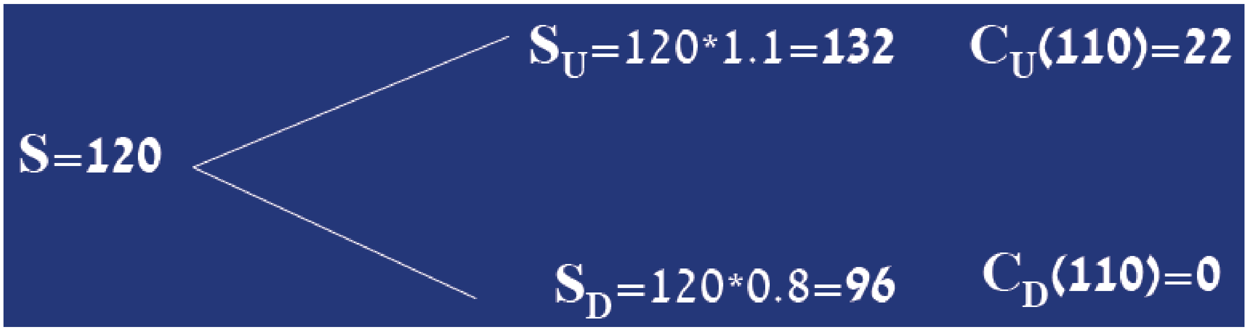
נניח שהנפקנו 5 ערך נקוב אג"ח שייפדו בחמישה תשלומים. כל ערך נקוב מהווה יחידה אחת שעומדת בפני עצמה אשר תיפדה בחמישה תשלומים שווים. בכל מועד תשלום אנחנו לא מחזירים קרן שעומדת בפני עצמה אלא משלמים תשלום אחד בגין היחידה. במידה והמחזיק באג"ח מעוניין להמיר 1 ערך נקוב למניה. הוא איננו יכול להמיר 1 ערך נקוב שייפדו בתשלום הקרוב. הוא למעשה ממיר חמישה תשלומים של 0.2 ערך נקוב. על כן לא ניתן להתייחס לרכיב ההמרה כאל חמישה אופציות עם מועדי פדיון שונים המחזיק איננו יכול להמיר את התשלום הראשון בלי להמיר את התשלום החמישי. מדובר למעשה באופציות אשר מועד הפקיעה שלהם תלוי אחד בשני ולכן ההנחה שכל אופציה עומדת בפני עצמה איננה נכונה.

אחת הדרכים להתמודד עם הבעיה היא באמצעות שימוש במודל גמיש אשר מתייחס לרכיב ההמרה כרכיב המרה אחד ולא כחמישה אופציות שעומדות בפני עצמן. המסקנה המתבקשת היא כי מודל Black & Scholes אינו מתאים לתמחור אג"ח להמרה.

כפי שראינו מודל Black & Scholes על כל יתרונותיו הינו מודל מוגבל אשר לא תמיד ניתן להתאים אותו למצבים מורכבים. קיימות שתי שיטות מוכרות המאפשרות גמישות רבה יותר בתמחור אופציות מורכבות. הראשונה, המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein שהוא מודל מאוד אינטואיטיבי ומאוד פופולארי. והשנייה, שימוש בסימולציות Monte Carlo מרובת תרחישים, כלומר, טכניקה מורכבת המבוססת על הבנה עמוקה בסטטיסטיקה.

המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein (C-R-R) עובד על עיקרון בסיסי: שווי אופציה שווה להיוון של תוחלות. ישנם שני שלבים: 1) לאמוד הסתברות לעליה של מחיר מניה והסתברות לירידה של מחיר מניה; 2) לחשב את תוחלת ערך האופציה בתאריך הפקיעה ונהוון לאחור עם ריבית חסרת סיכון, בהתבסס על ההסתברויות.

נניח שיש בידנו מניה ששווייה היום (S) 120 ₪ ומחירה עשוי או לעלות ב-10% או לרדת ב-20% בתוך חודש. כמו כן יש בידנו אופציית CALL אירופאית עם מחיר מימוש (X) של 110 ₪ לפקיעה בעוד חודש. מה יהיה שוויה בעוד חודש? התשובה היא $Max\{S-X,0\}$

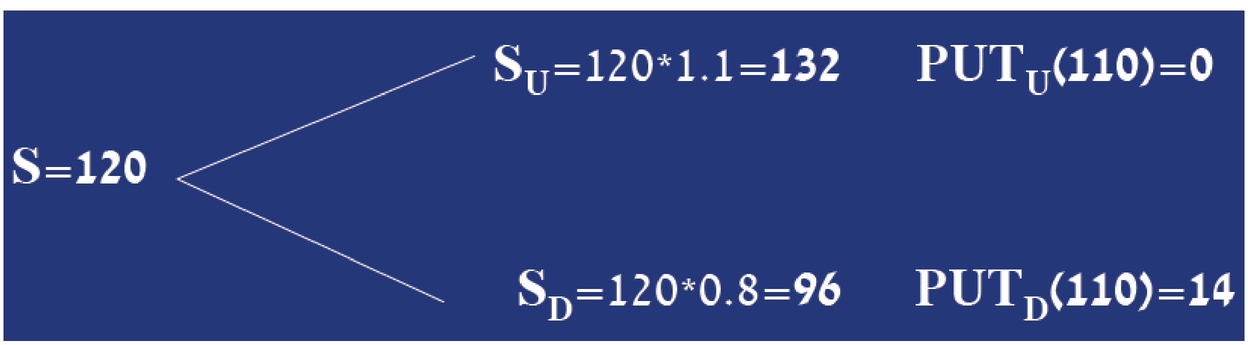


Source: KPMG.

לאחר שמצאנו את ערך האופציה בכל מצב טבע כל מה שאנו נדרשים לעשות זה להוון לנקודת ההתחלה. נניח עוד כי שיעור הריבית חסרת הסיכון לשנה (r) עומד על 10%, ההסתברות לעליה (Q) היא 0.6 (60%) ועל כן ההסתברות לירידה $(1-Q)$ היא 0.4 (40%). על כן שווי האופציה הוא כדלקמן:

$$C = \frac{Q \cdot C_U + (1+Q) \cdot C_D}{1+r} = \frac{0.6 \cdot 22 + 0.4 \cdot 0}{(1.1)^{\frac{1}{12}}} = 13.1$$

נניח שיש בידנו מניה ששווייה היום (S) 120 ₪ ומחירה עשוי או לעלות ב-10% או לרדת ב-20% בתוך חודש. כמו כן יש בידנו אופציית PUT אירופאית עם מחיר מימוש (X) של 110 ₪ לפקיעה בעוד חודש. מה יהיה שוויה בעוד חודש?
התשובה היא $Max\{X-S,0\}$



Source: KPMG.

לאחר שמצאנו את ערך האופציה בכל מצב טבע כל מה שאנו נדרשים לעשות זה להוון לנקודת ההתחלה. גם כאן נניח כי שיעור הריבית חסרת הסיכון לשנה (r) עומד על 10%, ההסתברות לעליה (Q) היא 0.6 (60%) ועל כן ההסתברות לירידה $(1-Q)$ היא 0.4 (40%).

על כן שווי האופציה הוא כדלקמן :

$$P=\frac{Q\cdot P_U+\left(1+Q\right)\cdot P_D}{1+R_f}=\frac{0.6\cdot 0+0.4\cdot 1.4}{\left(1.1\right)^{\frac{1}{12}}}=5.56$$

הדוגמאות שהצגנו, על אף שאינן מורכבות, ממחישות את האינטואיציה שעומדת מאחורי המודל הבינומי. בנוסף, ניתן לראות מהדוגמאות שמודל הבינומי מסוג Cox, Ross & Rubinstein (C-R-R) הינו מאוד גמיש. בניה נכונה של המודל מאפשרת לעשות להביא בחשבון מחיר מימוש משתנה, חלוקת דיבידנדים עתידים ותמחור אופציות אמריקאיות.

4. תקן חשבונאות אמריקאי SFAS123R

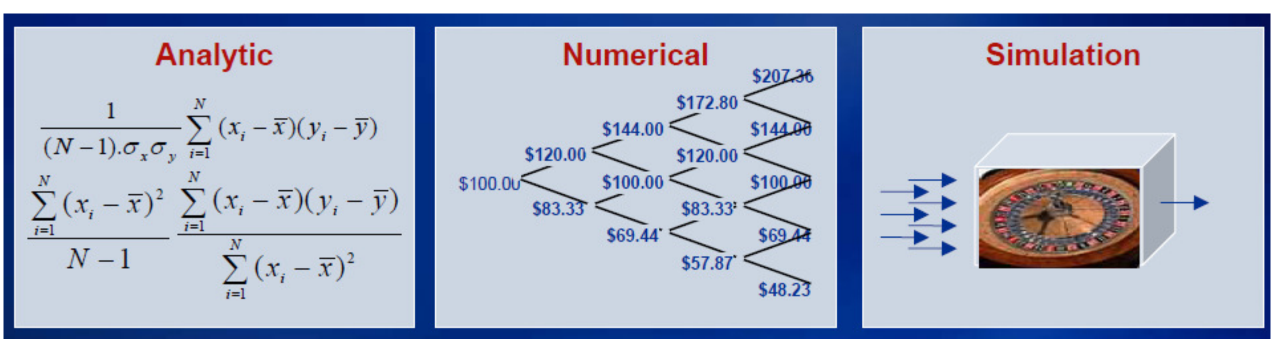
כפי שהוסבר בפרק הקודם הצעה לתקן חשבונאות מספר 24 - תשלום מבוסס מניות מבוסס על תקן דיווח כספי בינלאומי IFRS 2, וחל מיום 1 בינואר 2006. התקן חל על מכשירים פיננסיים שהוענקו לאחר יום ה- 15 במרס 2005 וטרם הבשילו (Vested) עד מועד תחולת התקן וכן על שינויים שחלו בתוכניות קיימות.

כתבי האופציות מוענקים ברגיל לעובדים, נושאי משרה ודירקטורים. היות ולא קיימת אפשרות מעשית למדוד באופן מהימן את השווי ההוגן של השירותים שהתקבלו ויתקבלו מידיהם, נמדד שווים של כתבי אופציה אלו על בסיס שווים ההוגן של המכשירים ההוניים המוענקים, במועד ההענקה.

קיימות שיטות רבות להערכת שווי אופציות אשר כולן מתבססות על אותה מתודולוגיה (רציפות או קירוב לרציפות) כגון מודל Black & Scholes, מודלים בינומיים ושיטות נומריות שונות (עצים תרינומיים, סימולציית Monte Carlo ושיטות Finite Difference). המתודולוגיות שבהן נהוג להשתמש לצורך הערכת כתבי האופציות לעובדים הינה שימוש המודל הבינומי מסוג Flexible Lattice Exercise Behavior. לשם בחינת סבירות תוצאות המודל ולצרכי תקן חשבונאות מספר 24, רצוי לשוב ולאמוד את שווי כתבי האופציות על פי מודל Black & Scholes.

על פי התקן שווי הוגן ייאמד על ידי שימוש במודלים להערכת שווי של אופציות כגון :

1. מודל Black & Scholes – לוקח בחשבון הנחות ומשתנים כגון : אורך החיים הצפוי של האופציה, התנודתיות הצפויה של המניה, תשואת הדיבידנדים הצפויה מהמניה, שיעור ריבית חסרת סיכון וכו'.
2. המודל הבינומי – לוקח בחשבון הנחות ומשתנים דומים לאלו המשמשים למודל Black & Scholes ובונה רשת הסתברויות למצבי עולם שונים לפיכך מוכר גם כמודל רשת.
3. מודל Monte Carlo – מודל המשמש בעיקר לקביעת ערך הוגן לתוכניות מבוססות ביצועים. המודל לוקח בחשבון מספר רב של תרחישים שונים בחברות שונות הנמצאות בתחום הפעילות של החברה, כאשר בכל תרחיש המודל בודק עד כמה הושגו היעדים, ומה התועלת שצמחה מכך (ההטבה) , לאחר מכן ההטבה שחושבה מהוונת לאחור ליום ההענקה. הערך שנקבע הינו ממוצע כלל ההטבות בכלל התרחישים ליום ההענקה.



בשנת 2005 חלו כמה התפתחויות בנוגע לתקן חשבונאות אמריקאיSFAS123R- Share Based Payment[7] בדבר תשלום מבוסס מניות. ראשית, רשות ניירות ערך האמריקאית, ה- SEC (US Securities and Exchange Commission) מפרסם הנחיות ליישום התקן (SAB107[8]), דוחה את מועד היישום לראשונה של התקן ומתייחס לאפשרות ליצירת שוק על מנת להעריך מענקים לעובדים. שנית, המוסד לתקינה חשבונאית אמריקאית, ה- FASB (Financial Accounting Standards Board) מפרסם הנחיות ליישום התקן (ESPs) ומקים קבוצה לדיון בנושאים הקשורים ליישום הוראות התקן.

בנוגע למדידת המענקים, קובע התקן כי הכרה בהוצאה בגין תשלום מבוסס מניות תיעשה לפי שווי הוגן. התקן אינו מעדיף שימוש במודל הערכה ספציפי, אולם קובע שישה פרמטרים שיש לקחת בחשבון בקביעת השווי ההוגן: 1) מחיר המימוש; 2) משך החיים הצפוי; 3) מחיר המניה; 4) התנודתיות הצפויה במחיר המניה; 5) הדיבידנדים הצפויים מהמניה; 6) שיעור ריבית חסרת סיכון למשך החיים הצפוי של המענק.

באשר למודל הערכה, ע״פ הנחיות SAB 107 אין העדפה למודל הערכה ספציפי, קרי החברות אינן נדרשות לעבור למודלים גמישים, אלא לצורך אמידת מכשירים שלא ניתן לאמוד אותם בעזרת מודל Black & Scholes (למשל מכשירים הכוללים תנאי שוק). כמו כן ההנחיות קובעות כי ניתן לשנות את מודל הערכה; שינויים אלו צפויים להיות בלתי תדירים.

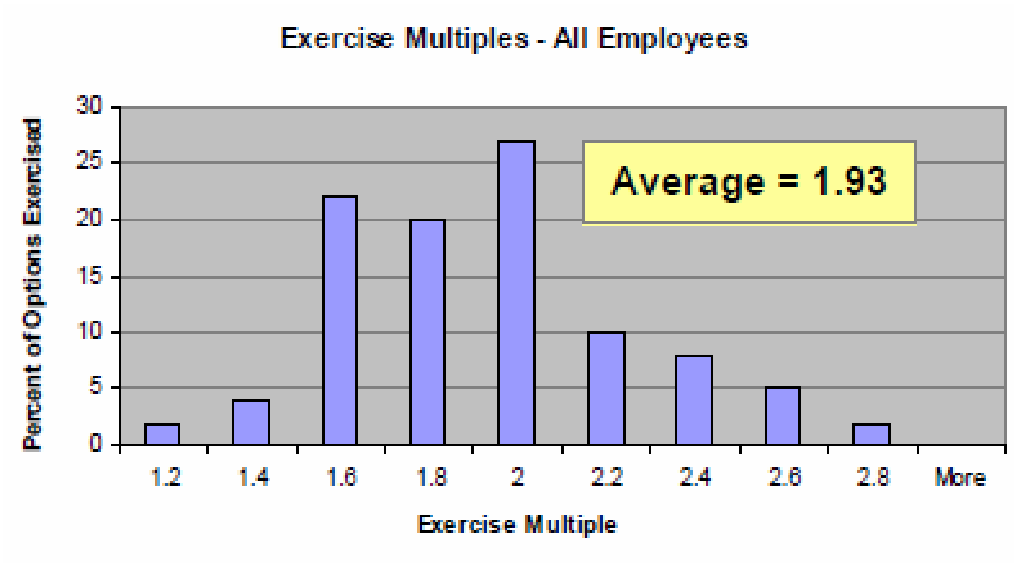
באשר למשך החיים הצפוי, הפקטורים שישפיעו על משך החיים הצפוי הם כדלקמן: 1) תקופת ה- Vesting; 2) נתונים היסטוריים לגבי התנהגות עובדים ועזיבות עובדים; 3) סטיית תקן צפויה; 4) תקופות חסימה; 5) גיל העובדים, משך השירות ומאפיינים אחרים של העובדים. על פי הנחיות SAB 107 הערכת שווי הוגן מתבססת על משך חיים <u>צפוי</u> ולא על משך חיים <u>חוזי</u>. SAB 107 קובע גישה פשטנית לאמידת משך החיים הצפוי אשר לא צפויה להיות בשימוש לאחר 31 בדצמבר 2007, לפיה משך החיים הצפוי שווה לממוצע תקופת ההבשלה והתקופה החוזית. נציין כי הגישה הפשטנית אינה ישימה לחברות פרטיות וכי התקן דורש את חישוב משך החיים הצפוי לקבוצות של עובדים בעלי התנהגות מימושים דומה.

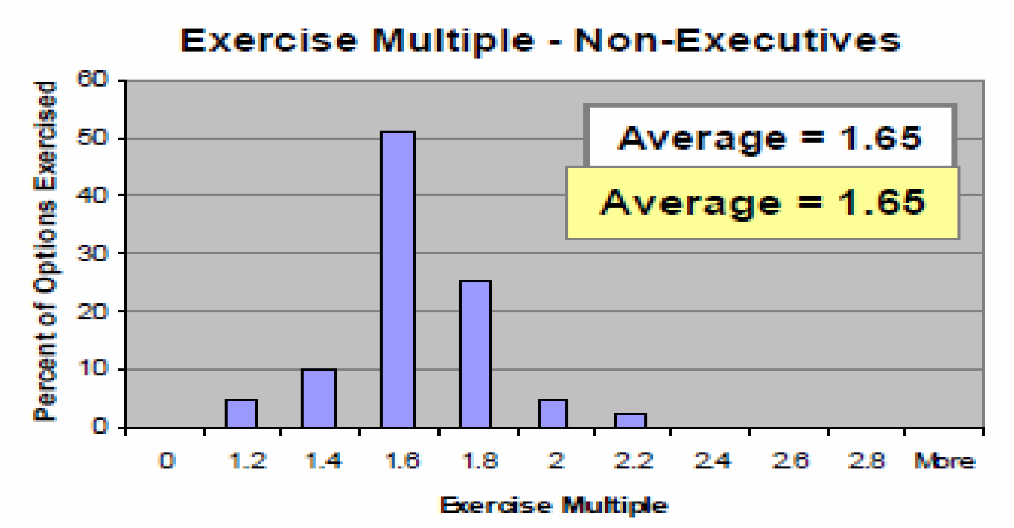
---

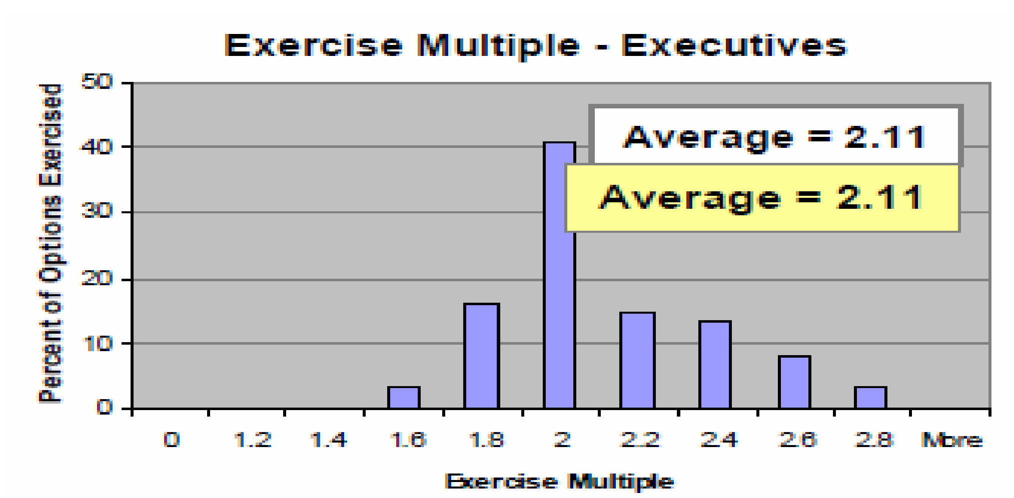
[7]SFAS 123(R), Statement of Financial Accounting Standards No. 123 (revised 2004) Share-Based Payment, http://www.fasb.org/

[8]SAB 107, Staff Accounting Bulletin No. 107, http://www.sec.gov/interps/account/sab107.pdf

להלן חלוקת משך החיים הצפוי לקטגוריות עובדים :







קיימים מספר פקטורים המשפיעים על התנודתיות (Volatility) הצפויה והם: 1) תנודתיות היסטורית לאורך משך החיים הצפוי של האופציה, בהתעלם מאירועים יוצאי דופן; 2) תנודתיות משתמעת אם לחברה אופציות או אגרות חוב המירות נסחרות; 3) משך הזמן שמניות החברה נסחרות; 4) אינטרוולים בין תצפיות; 5) מגזרים בתוך התאגיד; 6) מבנה ההון של התאגיד. לגבי התנודתיות ההיסטורית נציין שלושה דברים. ראשית, התקופה לחישוב תנודתיות היסטורית תהיה לפחות כמשך החיים הצפוי (אין לשים דגש מופרז על תקופות אחרונות). שנית, ראוי שחברות ציבוריות ישתמשו (בחברה בעלת סחירות נמוכה מספיקות גם תצפיות שבועיות או חודשיות). שלישית, נטרול תקופות מסוימות נאות רק בגין אירועים חריגים שאינם צפויים להישנות (נטרול צפוי להיות נדיר). באשר לתנודתיות המשתמעת נאמר כי ניתן להשתמש בה אם חברה יכולה לחשבה וניתן להסתמך עליה בלעדית רק אם מתקיימים תנאים מסוימים. עבור חברות שרק נרשמו למסחר יש לערוך חיפוש במאגרי מידע אודות חברות ציבוריות הפועלות בתחום בארץ ובחו"ל ולבחור בחברות והדומות במאפייניהן לפעילות החברה והתואמות בקירוב להיקף החברה מנתונים אודות חברות ציבוריות בארה"ב המסווגות בענף בו פועלת החברה.

בהקשר הריבית חסרת הסיכון הרי שבמודלים סגורים (כגון מודל Black & Scholes) מדובר בריבית על אג"ח ממשלתית ללא קופון שנפרעת ביום המימוש הצפוי של האופציה, בעוד שבמודלי רשת (כגון המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein) מדובר בריבית על אג"ח ממשלתית ללא קופון כפי שהיא נגזרת מעקום התשואה של האג"ח.

מענקים ניתנים לסיווג לשתי קבוצות עיקריות: כהון עצמי וכהתחייבות. עבור מענקים המסווגים כהון עצמי, השווי ההוגן נקבע במועד ההענקה ואינו נמדד מחדש בתקופות עוקבות. כמו כן עלות התגמול מוכרת על פני תקופת השירות הנדרשת. עבור מענקים המסווגים כהתחייבות, בחברות ציבוריות השווי ההוגן נמדד מחדש בתקופות עוקבות, כאשר כל השינויים בשווי ההוגן נזקפים לדוח רווח והפסד.

להלן שתי דוגמאות למענקים המסווגים כהון עצמי: 1) מרבית המענקים המסולקים במניות; 2) מענק עם אופציית Put, אשר מעביר לעובד את הסיכונים והתשואות הנובעים מבעלות לפרק זמן סביר (שישה חודשים ומעלה). להלן חמש דוגמאות למענקים המסווגים כהתחייבות: 1) מענק המסולק במזומן; 2) מענק המקנה לניצע את האפשרות לבחור ביישוב במזומן; 3) מענק בסכום כספי קבוע שיסולק במניות התאגיד; 4) מענק בעל תאי הבשלה שאינם תנאי שירות, תנאי ביצוע או תנאי שוק; 5) מענק שתוספת המימוש שלו נקובה במטבע שאינו מטבע הפעילות או המטבע בו נקוב השכר.

לגבי מועד ההענקה, נאמר כי ה- SEC עורך חקירה בנוגע לעיתוי הענקת אופציות, כאשר החקירה מתמקדת בשאלה, האם חברות "הקדימו" את מועד ההענקה (נכון לדצמבר 2005 כשתיים עשרה חברות נמצאות תחת חקירה). נזכיר רק כי דיווח על מועד הענקה, שאינו מועד הענקה בפועל, משפיע על הוצאות התגמול הנזקפות. מקור החקירה הוא במחקרים אקדמיים, שמצאו כי מחירי המניות ירדו בתקופות שלפני הענקות ועלו לאחר מכן. נזכיר כי יש למדוד שווי הוגן של תשלום מבוסס מניות במועד ההענקה, כאשר מועד ההענקה הוא המועד בו חולקים העובד והמעביד הבנה משותפת של התנאים העיקריים בהסדר, כגון: 1) המענק אושר; 2) המעביד מחויב למסור מכשירים הוניים או נכסים תמורת השירות הנדרש; 3) העובד החל להרוויח או להפסיד משינויים במחיר המניה. על פי FSP SFAS123R - 2, ניתן להניח כי קיימת הבנה משותפת אם: (1) מקבל המענק אינו יכול להתמקח על תנאיו העיקריים וכן (2) החברה צפויה לדון עם העובד בתנאים העיקריים <u>בתוך פרק זמן קצר</u> עד האישור.

לגבי הכרה בהוצאה, ההוצאה תסווג לאותו סעיף בדוח רווח והפסד אליו נזקפות הוצאות השכר של העובד (כגון הוצאות הנהלה וכלליות, הוצאות מו״פ, עלות המכר וכיוב׳, ובנוסף קיים איסור על הצגת תשלום מבוסס מניות בשורה נפרדת) ויש לשקלל את אומדן חילוטי האופציות ולהתאימו בכל תאריך חתך. באשר להענקה במנות ניתן לבחור מבין שתי חלופות: 1) טיפול בעל מנה כמענק בנפרד; 2) טיפול במענק כולו כמענק אחד למטרת הכרה (למרות שניתן לאמוד שווי הוגן לכל מנה בנפרד).

ישנם כמה נושאים נוספים שעליהם מדבר התקן, כגון: אם העובד זכאי לפרוש ולקבל את המענק, ההוצאה תוכר מיידית; 2) הסכמי אי-תחרות עלולים להיחשב כתנאי שירות; 3) מענקים שבגינם לא נבדק בעבר הצורך בהיוון העלויות שהוצגו בביאור הפרופורמה (למלאי, רכוש קבוע וכו׳); 4) הקלה לצורך חישוב ה- לצורך הטיפול במסים נדחים 3 - FSP SFAS123R.

להלן טבלה המתארת את הוראות המעבר לחברות ציבוריות:

תקופת הדיווח והשיטה המיושמת	שנות דיווח המתחילות לאחר ה- 15 ביוני 2005	מספרי השוואה לשנים קודמות
פרוספקטיבית מתוקנת ללא הצגה מחדש	הענקות חדשות ושינויים יטופלו לפי התקן החדש (SFAS123R) בעוד שהטיפול במענקים שטרם הבשילו יהיה לפי התקן הישן (SFAS123)	ללא שינוי
רטרוספקטיבית מתוקנת	הענקות חדשות ושינויים יטופלו לפי התקן החדש (SFAS123R) בעוד שהטיפול במענקים שטרם הבשילו יהיה לפי התקן הישן (SFAS123)	כפי שדווחו בביאור פרו-פורמה

על פי הוראות המעבר, יש לדווח על השפעה מצטברת בגין מענקים המסווגים כהתחייבות, ובגין שינוי בשיטת הטיפול בחילוטים. חברות פרטיות יאמצו פרוספקטיבית משנים פיסקאליות המתחילות לאחר ה- 15 בדצמבר 2005 (למעט חברות פרטיות שיישמו את שיטת השווי ההוגן בדוחות או בביאור). כמו כן, מנפיקים זרים המדווחים בהתאם ל- Item 17 שאין להם נתונים לגבי השווי ההוגן של מענקים שניתנו בעבר יישמו את התקן באופן פרוספקטיבי לגבי אותם מענקים.

להלן ההבדלים העיקריים בין כללי החשבונאות האמריקאית לבין התקינה החשבונאית הישראלית:

	SFAS 123R	IFRS 2 ותקן 24
הגדרת עובדים	מתקיימים יחסי עובד-מעביד על פי החוק	"עובדים ואחרים המספקים שירותים דומים"
יום המדידה לגבי צדדים שאינם עובדים	EITF 96-18	על פני תקופת קבלת הסחורות או השירותים
מדידה	אפשרות לשווי פנימי משתנה במענקים התחייבותיים בחברות פרטיות	שווי פנימי משתנה, רק אם לא ניתן להעריך שווי הוגן
מענקים במנות	ניתן לבחור מדיניות חשבונאית	כל מנה מטופלת בנפרד
השלכות מס	מסים נדחים לא יותאמו בשל שינוי במחיר המניה, וניתן לקזז מול פרמיה	מסים נדחים יותאמו בשל שינויים במחיר המניה, ואין לקזז מול פרמיה

לדעתנו, בעתיד נראה מעבר לתוכניות ביצועיות, אימוץ תוכניות אופציות עם מימוש נטו (SAR), מעבר להענקת מניות חסומות, שימוש ב- ESPPs, חברות מתכוונות לספק דיווחים המנטרלים את ההוצאות בגין האופציות ומעבר הדרגתי למדידה לפי מודלי רשת (מודלים בינומיים ותרינומיים) על מנת להגיע למדידת הוצאות מופחתות.

בהקשר למודלים גמישים, ראוי לצטט מתוך הדוחות הכספיים של חברת CISCO:

*"Upon adoption of SFAS 123(R), **the Company began estimating the value of employee stock options and employee stock purchase rights on the date of grant using a lattice-binomial model.** Prior to the adoption of SFAS 123(R), the value of each employee stock option and employee stock purchase right was estimated on the date of grant using the Black-Scholes model for the purpose of the pro forma financial information required in accordance with SFAS 123."*

*"The Company's employee stock options have various restrictions including vesting provisions and restrictions on transfer and hedging, among others, and are often exercised prior to their contractual maturity. **Lattice-binomial models are more capable of incorporating the features of the Company's employee stock options than closed-form models such as the Black-Scholes model.** "*

כאמור בעתיד אנו צפויים לראות: 1) אקסלרציה של תקופת ההבשלה בגין תוכניות קיימות; 2) מעבר להענקת מניות חסומות; 3) הגדרת יום ההענקה; 4) אימוץ תוכניות אופציות עם מימוש נטו (SAR); 5) אבחנה בין מענקים הוניים לבין מענקים התחייבותיים; 6) פיתוח הנחות למדידה שווי המכשירים; 7) מעבר הדרגתי למדידה לפי מודלי רשת (בינומיים ותרינומיים) על מנת להגיע למדידת הוצאות מופחתות.

5. הצעה לתקן חשבונאות מספר 24

המושג "שווי הוגן" לקוח מעולם התוכן החשבונאי. "שווי הוגן" (FAIR VALUE) מוגדר כשווי שבו נכס יימכר בעסקה שבין מוכר מרצון וקונה מרצון, כאשר אף צד אינו פועל תחת מגבלה או לחץ, כששני הצדדים פועלים באופן רציונאלי, מכירים באופן סביר את כל העובדות והנסיבות הרלוונטיות וכל צד מבקש להשיא את תועלתו הכלכלית. שווי זה נקבע על ידי שימוש באחת משלוש גישות מרכזיות: גישת ההכנסות/הרווח, גישת העלות וגישת השוק. התיאוריה הכלכלית הקלאסית גורסת, כי שווי הוגן נקבע בשווקים משוכללים בהם האינפורמציה מלאה ועל בסיס עסקה בתהליך של "ממוכר מרצון לקונה מרצון" (At arm's length).

אחד השינויים המשמעותיים ביותר כתוצאה מכניסת תקני ה-IFRS לתוקף יהיה שינוי דרך המדידה של אלמנטים שונים ב"שפה החשבונאית" לבסיס "שווי הוגן" כגון קביעת שווי הוגן למכשירי הון, כגון מניות בכורה והקצאות אופציות לעובדים (ESOP's). כפי שנידון בהצעה לתקן חשבונאות ישראלי **24**, בתקן דיווח כספי בינלאומי IFRS**2**, בתקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R ועל פי כלל ה- IRS (רשות המס האמריקאית) - **409**A.

כתבי האופציה מוענקים ברגיל לעובדים, נושאי משרה ודירקטורים. אולם, היות ולא קיימת אפשרות מעשית למדוד באופן מהימן את השווי ההוגן של השירותים שהתקבלו ויתקבלו מידיהם, נמדד לרוב שווים של כתבי אופציה אלו כנגזרת על בסיס שווים ההוגן של המכשירים ההוניים המוענקים, במועד ההענקה. קיימות שיטות רבות להמחרת שווי אופציות אשר כולן מתבססות על אותה מתודולוגיה (רציפות או קירוב לרציפות) כגון מודל Black & Schools, המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein (C-R-R) ושיטות נומריות מהסוג המכונה Finite Difference Method.

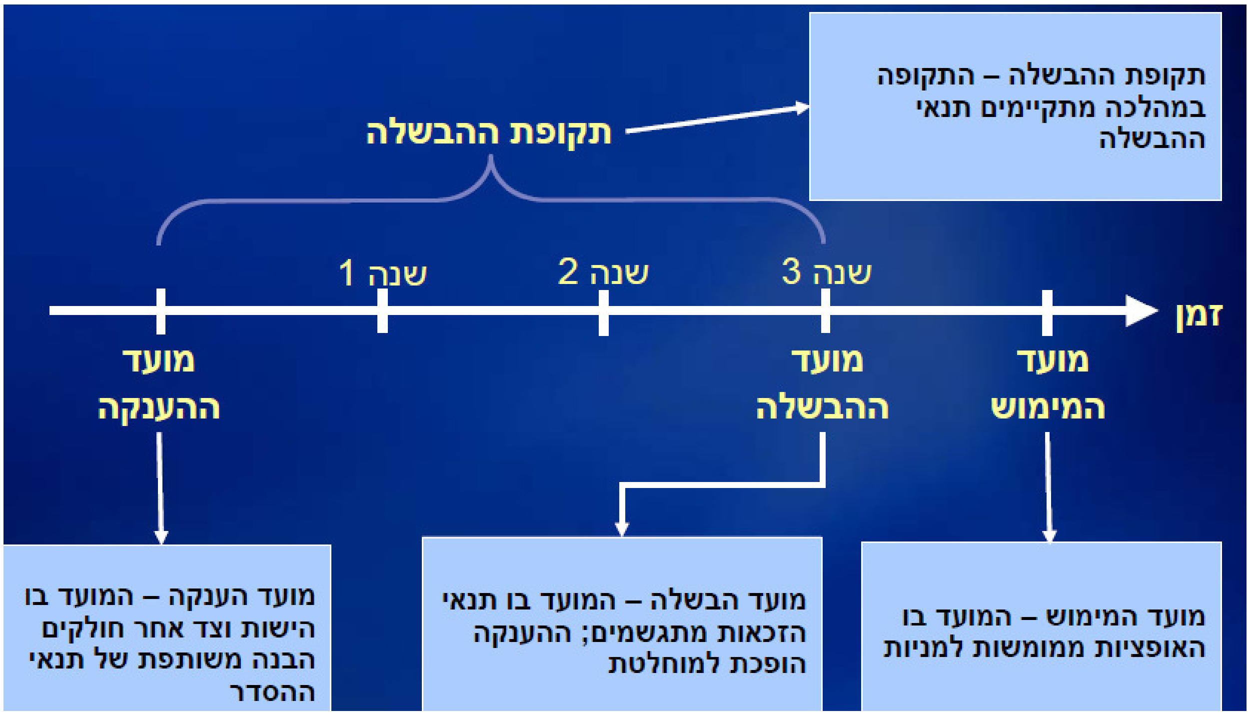
המצב בעולם הוא שבעוד שכללי החשבונאות הבין לאומית (IFRS), במקרה שלנו IFRS2, בתוקף החל מינואר 2005, לגבי כל המענקים שניתנו או שונו החל מה- 7 בנובמבר 2002, ושלא הבשילו עד ה- 1 בינואר 2005, הרי שכללי החשבונאות האמריקאית (US GAAP), במקרה שלנו SFAS123R, בתוקף החל משנים פיסקאליות המתחילות לאחר ה- 15 במרץ 2005. לגבי התקינה החשבונאית ישראלית, הרי שעד יוני 2005 לא היו כללים מחייבים (מלבד בנקים) ועל כן רוב החברות בחרו לא לרשום הוצאות.

באופן כללי תקן חשבונאות ישראלי מספר 24 - תשלום מבוסס מניות - חל על כל העסקאות בהן חברה רוכשת שירותים ו/או נכסים בתמורה המבוססת על מכשירי הון שלה (לא רק על אופציות לעובדים). התקן קובע עקרון של מדידה לפי שווי הוגן. נציין כי התקן בתוקף משנת 2006 ודורש הצגה מחדש לגבי מענקים ההוניים שהוענקו או שונו לאחר ה- 15 למרץ 2005 ולא הבשילו עד ל- 1 בינואר 2006.

התקן חל על כל עסקאות תשלום מבוסס מניות, כגון: 1) תשלומים מבוססי מניות בהם החברה מקבלת נכסים או שירותים תמורת הנפקת מכשירים הוניים (למשל, מניות ואופציות); 2) תשלומים מבוססי מניות המסולקים במזומן, בהם החברה רוכשת נכסים או שירותים על ידי נטילת התחייבות לתשלום סכומים המבוססים על שווי מכשירי הון שלה; 3) תשלומים מבוססי הון בהם לחברה או לספק יש אפשרות בחירה בין סילוק במזומן או במכשירים הוניים.

להלן מספר דוגמאות לתחולה: תשלומים מבוססי מניות לעובדים, תשלומים מבוססי מניות למי שאינם עובדים (כגון: ספקים), תכניות לרכישת מניות על ידי עובדים, תשלומים מבוססי מניות המבוצעים על ידי חברות הקבוצה ותשלומים מבוססי מניות המבוצעים ישירות מבעלי מניות.

להלן תרשים של ציר הזמן של אופציות למניות:



המקור: KPMG.

התקן קובע כי הכרה תעשה במקרים הבאים: 1) ישות תכיר בסחורות ושירותים, שנרכשו בעסקת תשלום מבוסס מניות, עם קבלת הסחורות או השירותים; 2) כאשר הסחורות או השירותים אינם כשירים להכרה כנכסים, הם יוכרו כהוצאה; 3) בעסקאות של תשלום מבוסס מניות המסולקות במכשירים הוניים, יוכר גידול מקביל בהון העצמי; 4) בעסקאות של תשלום מבוסס מניות המסולקות במזומן, נוצרת במקביל התחייבות.

להלן טבלה באשר למדידה:

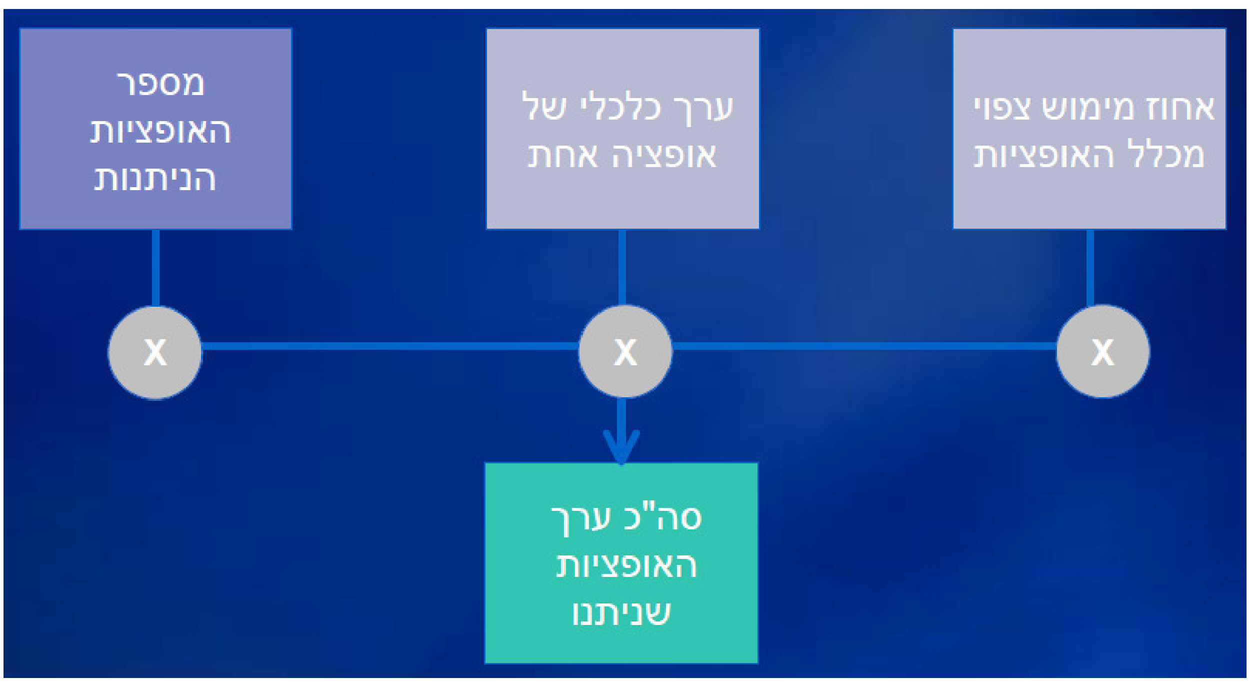
עסקאות שיישובן במכשירים מבוססי מניות	**עובדים (ונותני שירותים דומים)**	**אחרים**
סחורות ושירותים נמדדים במישרין, לפי השווי ההוגן של הסחורות או השירותים שהתקבלו	לא	כן
סחורות ושירותים נמדדים בעקיפין, בהתייחס לשווי ההוגן של המכשירים ההוניים שהוענקו	כן	רק אם מדידה במישרין אינה מהימנה
סחורות ושירותים נמדדים לפי השווי הפנימי של המכשירים ההוניים	במקרים מאוד נדירים	במקרים מאוד נדירים

באשר למדידה והכרה לגבי סילוק במניות התקן קובע כי הבשלה שאינה מותנית תביא להכרה מיידית בעלות פיצוי ולגידול מיידי של ההון העצמי, בעוד ש הבשלה מותנית תביא להכרה בעלות פיצוי נפרסת על פני תקופת ההבשלה ולכך שההון העצמי יגדל בהדרגה.

התקן קובע כי השווי ההוגן של מכשירים הוניים יימדד במועד ההענקה ויתבסס על מחירי שוק, תוך התאמה לתנאים לפיהם הוענקו המכשירים. בהיעדר מחירי שוק, קובע התקן, השווי ההוגן ייאמד תוך שימוש בטכניקת הערכה מקובלת לתמחור מכשירים פיננסיים.

התקן מגדיר את מועד ההענקה כמועד שבו הישות והצד המקבל מסכימים להסדר, ולישות ולמקבל הבנה משותפת של תנאי ההסדר. אם ההסכמה כפופה לתהליך אישור (לדוגמה: אישור בעלי מניות), מועד ההענקה יהיה המועד בו הושג האישור. נציין כי עבור תנאים אובייקטיביים (לדוגמה: תוספת מימוש שתלויה במחיר שוק של מניה) ישנו מועד הענקה בעוד שעבור תנאים סובייקטיביים (לדוגמה: הדירקטוריון יחליט על כמות המניות/אופציות שתוענק בתום תקופת ההבשלה) הרי שאין מועד הענקה.

חישוב הערך הכולל של התגמול ההוני הניתן נובע ממספר גורמים המשוכללים יחדיו לערך אחד:

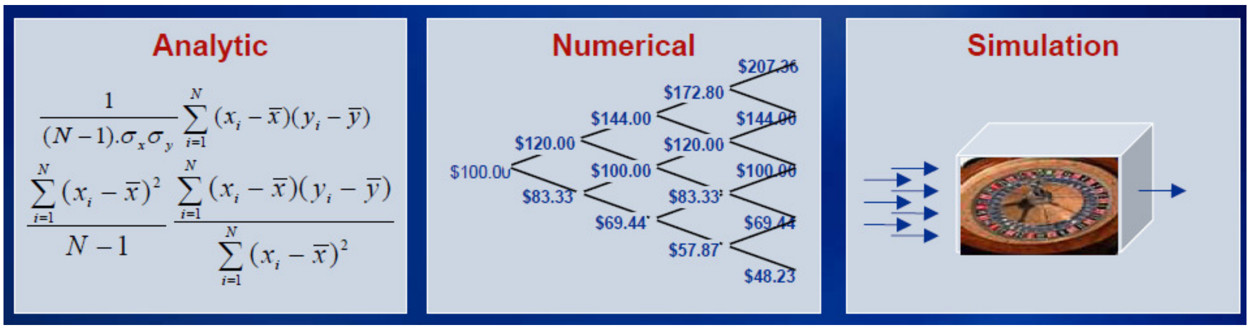


המקור: KPMG.

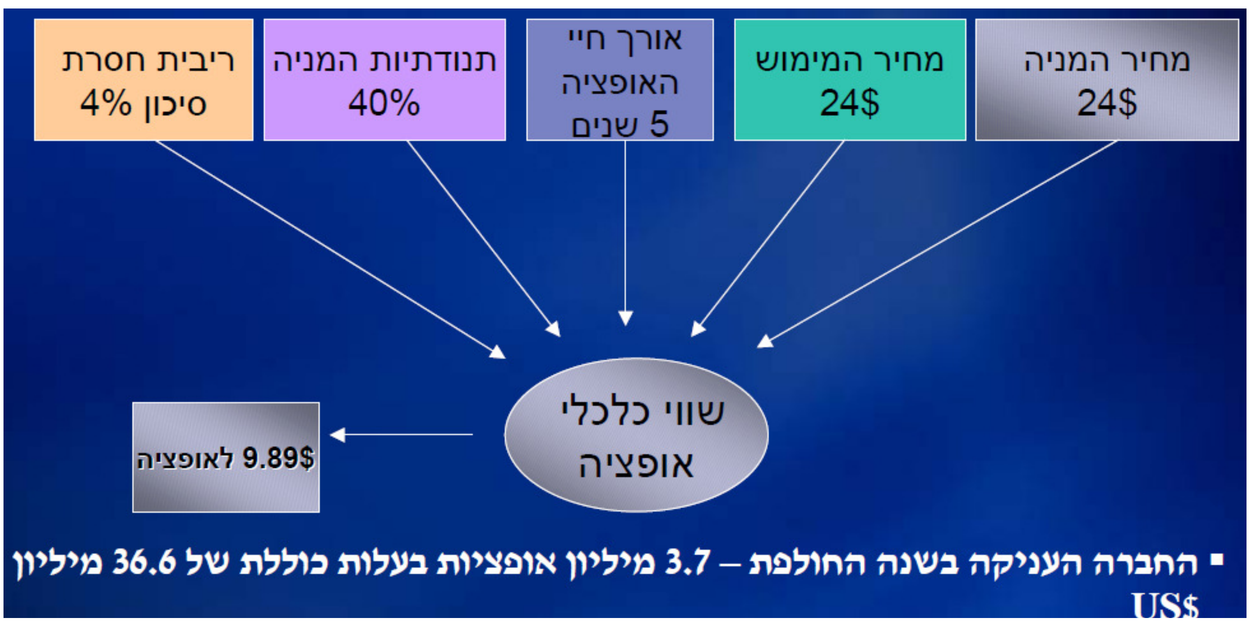
על פי התקן שווי הוגן ייאמד על ידי שימוש במודלים להערכת שווי של אופציות כגון:

1. מודל Black & Schools – לוקח בחשבון הנחות ומשתנים כגון: אורך החיים הצפוי של האופציה, התנודתיות הצפויה של המניה, תשואת הדיבידנדים הצפויה מהמניה, שיעור ריבית חסרת סיכון וכו'.
2. המודל הבינומי – לוקח בחשבון הנחות ומשתנים דומים לאלו המשמשים למודל Black & Schools ובונה רשת הסתברויות למצבי עולם שונים לפיכך מוכר גם כמודל רשת.

3. מודל Monte Carlo – מודל המשמש בעיקר לקביעת ערך הוגן לתוכניות מבוססות ביצועים. המודל לוקח בחשבון מספר רב של תרחישים שונים בחברות שונות הנמצאות בתחום הפעילות של החברה, כאשר בכל תרחיש המודל בודק עד כמה הושגו היעדים, ומה התועלת שצמחה מכך (ההטבה) , לאחר מכן ההטבה שחושבה מהוונת לאחור ליום ההענקה. הערך שנקבע הינו ממוצע כלל ההטבות בכלל התרחישים ליום ההענקה.



להלן דוגמה להמחשת השפעת ההנחות על הרווח הנקי:



המקור: KPMG.

להלן ניתוח רגישות:

	עלייה של 10% בפרמטר הבודד			
	מחיר המימוש	אורך חיי האופציה	תנודתיות המניה	ריבית חסרת סיכון
שינוי בהוצאה (באלפים)	-2,849	1,776	2,479	592
אחוז השינוי בשווי האופציה	-8%	5%	7%	2%

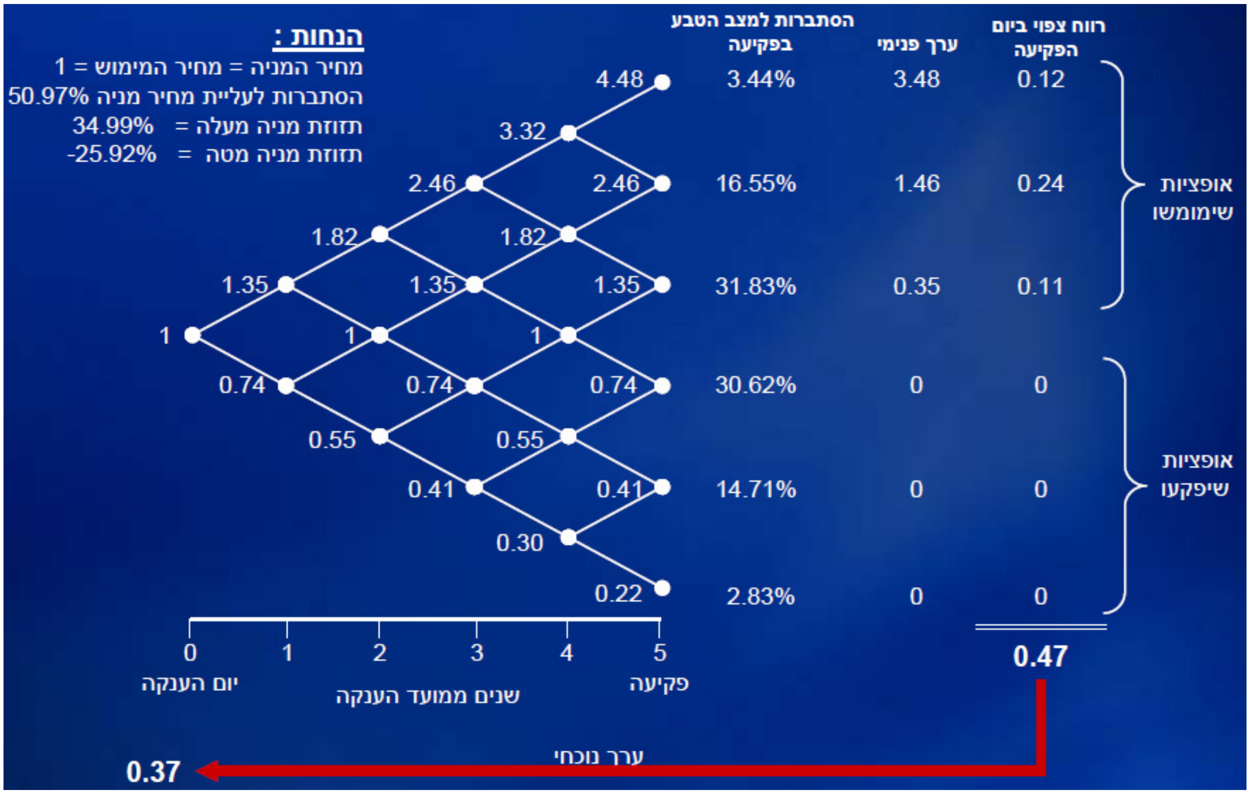
המקור: KPMG.

המודל הבינומי נמנה על מודלי הרשת (Lattice). המודל הינו מורכב יותר לביצוע מאשר מודל Black & Schools מצריך בניית מודל פרטני ולפיכך עד כה השימוש בו היה מועט יחסית בארה"ב וישראל, עם זאת המודל הינו מודל גמיש יותר ויתרונו הגדול בכך שניתן להביא לידי ביטוי בו שינויים החלים באופן שוטף (כגון שינויים בשערי הריבית, בסטיות תקן ועוד).

בניית המודל מתבצעת בשלושה שלבים:

1. המודל לשווי האופציה מורכב מטבלאות המכילות 2 תאים: בתא העליון שווי המניה בכל נקודת ביקורת ובתא התחתון שווי האופציה.
2. לכל תקופת זמן קיימת אפשרות לעלייה במחיר המניה (U) או ירידה (D) הנגזרות משונות המניה ועל פיהן נקבע מחיר המניה בתקופה זו.
3. קביעת ערך האופציה בנק' הסיום = על פי הערך הפנימי.
4. חישוב שווי האופציה על ידי שימוש באינדוקציה לאחור, תוך שימוש בהסתברויות לעליית מחיר וירידת מחיר המניה ושיעור היוון.

להלן דוגמה להמחשת המודל הבינומי:



המקור: KPMG.

למעשה ניתן לחלק את המודלים למדידת שווי אופציות לארבע קטגוריות. הראשונה, שווי פנימי, לפיו מחיר האופציה הוא הגבוה מבין: מחיר המניה פחות תוספת המימוש, או אפס. השנייה, שווי נאיבי, לפיו מחיר האופציה הוא הגבוה מבין: מחיר המניה פחות תוספת מימוש מהוונת ליום החישוב, או אפס. השלישית, מודלים סגורים (למשל, מודל Black & Schools או מודל Merton), על פיהם מחיר האופציה הינו פונקציה של מחיר המניה, תוספת המימוש, הזמן עד למימוש, תשואת הדיבידנדים של המניה, הריבית חסרת הסיכון וסטיית התקן של תשואת המניה והרביעית, שווי הוגן – מודלי רשת (למשל, מודלים בינומיים או מודלים תרינומיים), קרי מודלים המעריכים את שוויים של אופציות על ידי בניית עצי הסתברויות של מצבי טבע תוך התחשבות במחיר המניה בכל תקופה, סטיית התקן של תשואת המניה לאורך זמן, שיעור דיבידנדים, ריבית חסרת סיכון, התנהגויות של מחזיקי האופציה וכו'.

בהקשר לביקורת על מודל Black & Schools ראוי לצטט את חברת LUCENT TECHNOLOGIES שקבעה:

"The fair value of stock options… is estimated using the Black-Schools option-pricing model, which was developed for use in estimating the fair value of traded options that have no vesting restrictions and are fully transferable. In addition, this model requires the input of subjective assumptions... Changes in these subjective assumptions can materially affect the fair value estimate, and therefore the existing valuation models do not provide a precise measure of the fair value of the Company's employee stock options."

נסכם את הביקורת על המודלים באמצעות הטבלה הבאה:

	מודל Black-Schools המסורתי (SFAS 123)	**רשת/בינומי**
מותאם למאפיינים המיוחדים של אופציות לעובדים	לא	באופן חלקי
קל ליישום	כן	לא
משתלם כלכלית	כן	לא
מדויק ומהימן	באופן חלקי	לא
שקוף	כן	לא
עקבי/בר השוואה	לא	לא
קל לאמות	כן	לא
קל לביקורת	באופן חלקי	לא

באשר לטכניקות הערכה נציין כי ישנם שישה פרמטרים שיש לכלול בתמחור אופציות והם: 1) מחיר המימוש של האופציה; 2) משך חיי האופציה; 3) המחיר השוטף של מניות הבסיס; 4) סטיית התקן הצפויה של מחיר המניה; 5) הדיבידנדים הצפויים בגין המניות; 6) שיעור ריבית חסרת סיכון לתקופה כמשך חיי האופציה/ נוסיף כי במידת הצורך, יש לכלול גורמים נוספים, שמשתתפים מרצון בשוק, הפועלים בצורה מושכלת, ישקלו בקביעת המחיר. התקן קובע כי יש להשתמש במודלים לתמחור אופציות כגון: מודל Black & Schools או מודל גמיש יותר (בינומי/תרינומי). במקרים נדירים בהם לא ניתן להעריך את השווי ההוגן של המענק, קובע התקן, כי יש להשתמש בשווי פנימי משתנה (Intrinsic Value).

להלן טבלה המתארת את השפעת פרמטרים שונים על שווי הוגן של אופציה:

עלייה ב:	**השפעה על השווי ההוגן:**
תוספת המימוש	↓
ריבית חסרת סיכון	↑
סטיית תקן	↑
דיבידנד	↓
אורך חיי האופציה	↑

כאמור, משך חיי האופציה נקבע בחוזה, אך יחד עם זאת, לפי ניסיון העבר בחברות אחרות, בעלי האופציות ובעיקר עובדים, נוהגים לממש את האופציות בתקופה מוקדמת יותר במקרים רבים בימים הראשונים בהם הדבר מתאפשר. הדבר נובע בין השאר משנאת הסיכון של העובדים, חוסר הסחירות של האופציות, הצורך במזומנים של עובדים, והעובדה שבמקרים רבים רואים זאת כתחליף לבונוס כספי המתקבל במזומן. כאשר אופציות מוענקות "בכסף", הרי שהן ניתנות למימוש תוך הנאה כלכלית (בסבירות גבוהה) בכל נקודת זמן (לאחר ההבשלה/החסימה), חלק גדול ממקבלי האופציות הינם עובדים בעלי שכר לא גבוה אשר מימוש האופציות יהווה עבורם מענה לצורך כספי.

נציין כי טרם הצטברו בארץ מספיק נתונים לגבי תקופת המימוש בפועל בחברות אחרות. במאמר מוסגר ניתן לציין, כי במקרה של מניות שניתנו לעובדי בנקים (במסגרת הפרטה) ניתן היה לחזות במימוש מהותי בימים הראשונים לאחר שחרור החסימה (במקרים בהם היה רווח לעובדים). לאור זאת, נראה לנו שתקופת המימוש צריכה להיות תקופה הלוקחת בחשבון את כל הגורמים המוזכרים לעיל.

בתקינה האמריקאית העוסקת בנושא הוצע ע"י רשות ני"ע האמריקאית בפרשנות המופיעה ב- SAB 107[9] דרך פשטנית לקביעת משך חיי האופציה במקרים אלו של אופציות פשוטות. על פי המוצע בפרסום זה, התקופה תהיה הממוצע בין תקופת ההבשלה (Vesting) לבין התקופה החוזית של האופציות. אומנם התקינה האמריקאית אינה חלה בישראל, אך לדעתנו ההיגיון והחשיבה העומדים מאחורי הדרך שנבחרה בפרסום זה יכול שיתאימו גם לתוכניות אופציות מסוימות בישראל. לאמור- ניתן לחשב את משך חיי האופציה הצפוי על בסיס ממוצעים לכל מנה בנפרד. לסיכום קיימים מספר פקטורים המשפיעים על משך החיים הצפוי והם: 1) תקופת ה- Vesting (חסם תחתון); 2) נתונים היסטוריים לגבי התנהגות עובדים ועזיבות עובדים; 3) סטיית תקן צפויה; 4) מחיר המניה; 5) דרג העובדים, משך השירות ומאפיינים אחרים של העובדים; 6) תקופות חסימה.

קיימים מספר פקטורים המשפיעים על סטיית התקן הצפויה והם: 1) סטיית תקן היסטורית לאורך משך החיים הצפוי של האופציה, בהתעלם מאירועים יוצאי דופן; 2) סטיית תקן משתמעת אם לחברה אופציות או אגרות חוב המירות נסחרות; 3) משך הזמן שמניות החברה נסחרות; 4) אינטרוולים בין תצפיות; 5) הנטייה של סטיית התקן לחזור לממוצע שלה (נטרול אירועים חריגים).

[9] Staff Accounting Bulletin no. 107 - "Certain Assumptions Used in Valuation Methods".

פקטורים נוספים המשפיעים מדידת שוויו ההוגן של המענק הם: 1) הריבית הנאמדת ע"י התשואה המשתמעת מאג"ח ממשלתיות ללא קופון שיתרת התקופה שלהן זהה ליתרת התקופה הצפויה של האופציות; 2) אפקט הדילול עבור אופציות שהנפיקה החברה; 3) חברות פרטיות וחברות שזה עתה נרשמו למסחר; 4) תנאי שוק.

באשר לחסימת מניות ואי סחירות, מודל Black & Schools בדומה לרוב המודלים להערכת אופציות, מבוסס על ההנחה שניתן לסחור באופציות בכל עת ולמכרן בכל עת ללא עלויות מהותיות. שווי נכס סחיר גבוה מהשווי של אותו נכס שאינו סחיר, שכן הסחירות מאפשרת לממש את הנכס באופן מיידי. עובדה זו באה לידי ביטוי בין השאר בכך שנכסים לא סחירים אינם יכולים להוות בטחונות להלוואות בנקאיות ומגופי מימון אחרים (שלא כמו מניות רגילות המהוות בטחונות). האופציות הניתנות לעובדים הינן חסרות סחירות לחלוטין, כלומר העובדים לא יוכלו לסחור בהן לכל אורך תקופת חייהן ובנוסף הן חסומות לפרק זמן של כמה שנים במהלכן העובדים לא יוכלו לממשן. משמע, האופציות שמקבלים העובדים הן נכס בלתי נזיל ובלתי סחיר לחלוטין, שכן לא ניתן להעבירן או לממשן במשך תקופה של כמה שנים. לאחר מכן הן נכס בעלות סחירות מוגבלת, שכן ניתן לממשן אך לא לסחור בהן.

על פי פרשנות רשות ני"ע בישראל לתקן חשבונאות ישראלי 24 ולתקן דיווח כספי בינלאומי IFRS2 אין לבצע כל ניכיון בגין היעדר סחירות ונזילות כליל (DLOM- Discount for Lack Of Marketability) או חסימה של אופציות לעובדים. לאור זאת, יש להתעלם במודלים מהשפעות החסימה ואי הסחירות הקיימות במהלך תקופת ההבשלה.

תנאי הזכאות מתחלקים לשלוש קבוצות. הראשונה - תנאי שירות, קרי, דרישה להשלמת תקופת שירות מסוימת. השנייה - תנאי ביצוע, דהיינו, השגת יעד של רווחיות או השגת יעד של רווח למניה. השלישית - תנאי שוק, למשל, עלייה של 15% במחיר המניה או השגת יעד מחיר מניה, לחילופין השגת שווי פנימי מסוים של אופציה למניה ולחילופי חילופין עליית שווי השוק של המניה ביחס למדד מחירי שוק של מניות של חברות אחרות. נסכם בכך שנאמר כי בעוד שלגבי הקבוצה הראשונה והשנייה התנאים לא יובאו בחשבון באמידת השווי ההוגן של המכשירים ההוניים במועד המדידה וכן הכרה בהוצאה תתבסס על האומדן הטוב ביותר של מספר המכשירים ההוניים הצפויים להבשיל, הרי שלגבי הקבוצה השלישית, חילוט אפשרי נלקח בחשבון בחישוב שווי הוגן למועד ההענקה והוצאה שהוכרה לא תבוטל בגין חילוט, הנובע מאי עמידה בתנאי שוק.

להלן דוגמא לתשלומים מבוססי מניות הוניים. נניח כי 100 אופציות הוענקו בתאריך ה- 1 בינואר 2006, הבשלתן מותנית בשלוש שנות שירות (תנאי שירות) ובתנאי שוק, כל העובדים נשארו מועסקים במשך תקופת האופציה וכי השווי ההוגן של אופציה למועד ההענקה הוא 3.5 ₪ (בהתעלם מתנאי שוק). עוד נניח כי תנאי השוק הוא השגת יעד מחיר מניה מסוים, אומדן הניכוי לשווי ההוגן בגין תנאי ביצוע המבוסס על השוק הוא 0.50 ₪ וכי השווי ההוגן למועד ההענקה של כל אופציה (בהתחשב בניכוי) הוא 3 ₪, אם כך, סך עלות הפיצוי היא 300 ₪ (100 אופציות כפול 3 ₪):

שנה 1	100 ₪
שנה 2	100 ₪

בסוף שנה 2 האומדן הטוב ביותר הוא שתנאי השוק לא יתקיים, (יעד מחיר המניה לא יושג), משמע תנאי השירות צפויים להתקיים. עלות שירותי העובדים בסך 300 ₪ תוכר, על אף שתנאי השוק אינו מושג (כל עוד השירותים מסופקים):

שנה 1	100 ₪
שנה 2	100 ₪
שנה 3	100 ₪

תנאי הביצוע הוא תנאי, שאינו תנאי שוק, שהינו יעד רווחיות מסוים. נניח כי השווי ההוגן במועד ההענקה של כל אופציה הוא 3.5 ₪ (עלות הפיצוי הצפויה היא 350 ש"ח) והקצאה נעשית על פני תקופת השירות על בסיס האומדן טוב ביותר של אופציות הצפויות להבשיל. אם כך, עלות שירותי העובד מותאמת בגין חילוטים היא:

	סך עלות פיצוי צפויה	**ייחוס מצטבר**	**הוצאה בשנים קודמות**	**הוצאה בשנה נוכחית**
שנה 1	350	(350/3)*1=117	0	(117)
שנה 2 (צפוי)	350	(350/3)*2=233	(117)	(117)

בסוף שנה 2 האומדן הטוב ביותר הוא שרק 50% מהעבדים יעמדו בתנאי הביצוע. קרי, כל תנאי השירות צפויים להתקיים:

	סך עלות פיצוי צפויה	**ייחוס מצטבר**	**הוצאה בשנים קודמות**	**הוצאה בשנה נוכחית**
שנה 1	350	(350/3)*1=117	0	(117)
שנה 2	175	(175/3)*2=117	(117)	0
שנה 3 (צפוי)	175	(175/3)*3=175	(117)	(58)
סה"כ				(175)

כאמור, ישנן גם עסקאות תשלום מבוסס מניות המסולקות במזומן. למשל כאשר חברה רוכשת סחורות או שירותים על ידי נטילת התחייבות לשלם במזומן תמורתם, בסכום המבוסס על מחיר ההון העצמי, כגון: המחיר של מניות החברה (אופציות פאנטום). ההכרה בעסקאות הללו תיעשה בשלושה שלבים: 1) ייחוס אומדן השווי ההוגן הראשוני על פני תקופת ההבשלה (בדומה למענק המסולק במכשירים הוניים); 2) השווי ההוגן של ההתחייבות נמדד מחדש בכל מועד דיווח ובמועד הסילוק (תנודתיות גבוהה ברווח והפסד); 3) שינויים בשווי ההוגן נזקפים לרווח או להפסד לתקופה. ניקח לדוגמא, 100 מענקי פאנטום (זכויות לעליית ערך המניה) שהוענקו ביום ה- 1בינואר 2006. נניח כי זכויות מותנות בשלוש שנות שירות (תנאי שירות) וכי האומדן הטוב ביותר הוא שכל העובדים יישארו מועסקים במשך תקופת ההבשלה. בהינתן כי השווי ההוגן למועד ההענקה של כל זכות הוא 3 ₪:

אומדן עוקב של	**שווי הוגן**	**שווי פנימי**
סוף שנה 1	4.00 ₪	1.50 ₪
סוף שנה 2	4.25 ₪	3.00 ₪
סוף שנה 3	4.50 ₪	4.25 ₪
מועד היישוב	4.00 ₪	4.00 ₪

כאשר כל תנאי השירות מתקיימים והזכויות מיושבות בתום שנת 2008:

	מענק מקורי	**מדידה מחדש**	**סה"כ לשנה הנוכחית**	**מצטבר**
שנה 1	100	33	(4*100)/3=133	133
שנה 2	100	50	(4.25*100)*2/3-133=150	283
שנה 3 (מועד ההבשלה)	100	67	(4.5*100)*283=167	450
שנה 4 (יישוב)	-	50-	(4*100)-450=-50	400
סה"כ	**300**	**100**		**400**

עוד נציין בהקשר לעסקאות תשלום מבוסס מניות עם חלופת תשלום במזומן כי: 1) קיימת אבחנה בין מצבים שלצד שכנגד יש אפשרות בחירה, לבין מצבים שהבחירה היא בידי הישות; 2) ישנה הפרדה בין מרכיב הוני למרכיב התחייבותי (בדומה לתקן חשבונאות ישראלי 22 – מכשירים פיננסיים); 3) אם הישות יכולה לבחור באפשרות הסילוק, או אז יש לבדוק האם יש לה את היכולת להנפיק מניות, ויש להתחשב במדיניות הישות במקרים דומים בעבר.

באשר לעסקאות תשלום מבוסס מניות עם צדדים שאינם עובדים, המדידה מתחלקת לשתי מתודות. הראשונה, מדידת הסחורות או השירותים שהתקבלו במישרין, לפי השווי ההוגן של הסחורות או השירותים והמתודה השנייה והיה והשווי ההוגן של הטובין או השירותים אינו ניתן למדידה מהימנה או אז המדידה תהיה לפי השווי ההוגן של המכשירים ההוניים. הכרה בהוצאה תהיה אלא אם הסחורה כשירה להכרה כנכס (כגון: מלאי, נדל"ן להשקעה).

באשר לשינויים וביטולים מתחלקים גם הן לשתי קבוצות. הראשונה, שינויים המקטינים את השווי ההוגן – השווי ההוגן למועד ההענקה המקורי. השנייה, שינויים המגדילים את השווי ההוגן - ההכרה תהיה בסכום של: השווי ההוגן למועד ההענקה המקורי; והשווי התוספתי (הפער בין השווי ההוגן של המענק החדש לבין המענק המקורי במועד השינוי). ניתן להבחין בין שני תרחישים: 1) אם לא צפוי שהמענק המקורי יהיה מזכה או אז תרשם הוצאה בגובה השווי ההוגן של המענק החדש; 2) אם צפוי שהמענק המקורי יהיה מזכה או אז בנוסף לשווי של המענק המקורי יירשם גם השווי התוספתי נציין עוד כי לגבי מענקים במנות (Graded Vesting) ההוצאות ירשמו ויפרסו בגין כל מנה בנפרד.

בנושא מיסים על הכנסה, פריסת ההוצאה לאורך תקופת השירות תיצור הפרש זמני שיש ליצור בגינו מסים נדחים. כמובן שיש להתחשב בשווי המניה בחישוב גובה המסים הנדחים בתקופות עד למימוש וכי הטבות מס בסכום עודף על ההוצאות שנרשמו בספרים ייזקפו ישירות להון העצמי. כמו כן, יש להקטין את גובה נכס המס אם לא צפויים

מספיק רווחים בעתיד בכדי לנצלו ובגין מענקים שלא יניבו לחברה הוצאה מוכרת בעתיד אין ליצור מסים נדחים - מסלול 102 הוני.

הבהרה 7 (מיסים על הכנסה) חלה על מענקים שלא הוכרה בגינם הוצאה, ושהניכוי לצורך מס טרם הותר עד ל- 31 בדצמבר 2004, כמו כן הטבות מס בגין מענקים שלא נרשמו בגינם הוצאות ייזקפו להון העצמי בתקופה בה יוכר הניכוי לצורך מס.

דרישות הגילוי קובעות כי: 1) יינתנו פרטים בדבר כל מענק מבוסס מניות שקיים בתקופה המדווחת; 2) שווי הוגן, המודל וההנחות ששימושו על מנת לחשב את השווי ההוגן של כל מענק; 3) יתרות של אופציות ושל מניות שהוקצו, לתחילת תקופה ולסוף תקופה; 4) סכום ההוצאות שנרשם בהתאם לתקן.

להלן טבלה המתארת את הוראות המעבר:

מענקים מבוססי מניות שניתנו	**התקן חל על המענק המקורי**	**התקן חל על שינויים שנעשו בין ה- 15.3.2005 ל- 1.1.2006**	**התקן חל על שינויים שנעשו אחרי ה- 1/1/2006**
לפני ה- 15 במרס 2005 וטרם הבשילו עד ל- 1.1.2006[10]	לא	כן	כן
לאחר ה- 15 במרס 2005 אך הבשילו עד ל- 1.1.2006	לא	לא	כן
לאחר ה- 15 במרס 2005 וטרם הבשילו עד ל- 1.1.2006	כן	כן	כן

להלן ההבדלים העיקריים בין כללי החשבונאות האמריקאית לבין התקינה החשבונאית הישראלית:

	SFAS 123R	**תקן 24**
מדידה	אפשרות לשווי פנימי משתנה במענקים התחייבותיים בחברות פרטיות	שווי פנימי משתנה, רק אם לא ניתן להעריך שווי הוגן
מענקים במנות	ניתן לבחור מדיניות חשבונאית	כל מנה מטופלת בנפרד
הגדרת הון והתחייבות	הגדרה צרה יותר של מענקים הוניים	הגדרה רחבה למענקים הוניים
השלכות מס	ים נדחים לא יותאמו בשל שינוי במחיר המניה וניתן לקזז מול פרמיה	מסים נדחים יותאמו בשל שינויים במחיר המניה, ואין לקזז מול פרמיה
יום המדידה לגבי מי שאינם עובדים	EITF 96-18	יום הענקה

[10] התקן חל על תקופות דיווח המתחילות ביום 1 בינואר 2006 או לאחר מכן.

להלן תרשים המתאר את השלכות המעבר לדיווח לפי שווי הוגן על רווחיות חברות :

	אמדוקס מיליוני דולרים		צ'ק פוינט מיליוני דולרים		אינטל מיליוני דולרים	
	2003	2004	2003	2004	2003	2004
רווח (הפסד) נטו, כפי שדווח:	169	235	244	248	5,641	7,516
הוצאות בגין רישום אופציות על פי שווין ההוגן:	(24)	(36)	(37)	(43)	(991)	(1,271)
רווח (הפסד) לאחר יישום התקינה החדשה:	145	199	207	205	4,650	6,245
אחוז השינוי ברווח:	-14%	-18%	-15%	-21%	-18%	-20%

המקור: KPMG.

	CISCO מיליוני דולרים		IBM מיליוני דולרים		LUCENT מיליוני דולרים	
	2004	2003	2003	2004	2004	2003
רווח (הפסד) נטו, כפי שדווח:	4,401	3,578	7,583	8,430	2,002	(770)
הוצאות בגין רישום אופציות על פי שווין ההוגן:	(1,215)	(1,259)	(1,025)	(951)	(322)	(268)
רווח (הפסד) לאחר יישום התקינה החדשה:	3,186	2,319	6,558	7,479	1,680	(1,038)
אחוז השינוי ברווח:	-28%	-35%	-14%	-13%	-16%	-35%

המקור: KPMG.

6. יישום השיטה המועדפת

כאשר באים ליישם את מתודולוגיית מודל הרשת הבינומי המותאם אישית, יש לקבוע תחילה כמה נתוני קלט:

- מחיר המניה במועד ההענקה;
- מחיר המימוש של האופציה המוענקת;
- הזמן עד לפקיעה של האופציה;
- שיעור הריבית חסרת הסיכון לאורך חיי האופציה;
- תשואת הדיבידנד של מניית הבסיס של כתבי האופציות לאורך חיי האופציה;
- התנודתיות של האופציה לאורך חיי האופציה;
- תקופת ההבשלה של האופציה המוענקת;
- מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית לאורך חיי האופציה;
- שיעורי חילוט ותחלופת עובדים לאורך חיי האופציה;
- תקופת חסימה לאחר ההבשלה כאשר האופציות אינן ניתנות למימוש;

הניתוח שלנו מניח כי העובדים אינם יכולים לממש את האופציות במהלך תקופת ההבשלה.

נוסף על כך, אם העובדים מפוטרים או מחליטים לעזוב מרצון במהלך תקופת ההבשלה, האופציות המוענקות יחולטו ויחשבו לחסרי ערך. מאידך, לאחר שהאופציות הבשילו, העובדים נוטים להפגין התנהגות מימוש לא יציבה כאשר האופציה תמומש רק אם היא תגיע למכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית.[11] עם זאת, במידה והעובדים עוזבים מרצון או מפוטרים הם חייבים לממש את האופציות בתוך זמן קצר, בהתעלם מסף ההתנהגות הלא אופטימאלית – אלא אם מתרחש חילוט (הנמדד באמצעות שיעורי חילוט ושיעורי תחלופת עובדים). לבסוף, והיה והגיע מועד הפקיעה, או אז האופציה תמומש אם היא "בתוך הכסף" (in-the-money), ותפקע חסרת ערך אם היא "בכסף" (at-the-money) או "מחוץ לכסף" (out-of-the-money). הפרק הבא מפרט את התוצאות שהושגו בניתוח.

[11] כפיל זה הוא היחס בין מחיר המניה כאשר האופציה ממומשת למחיר המימוש החוזי, והוא מבוסס על מידע היסטורי. התנהגויות מימוש בסמוך ולאחר פיטורי העובדים אינן נלקחות בחשבון.

7. התוכנה להערכת שווי אופציות לעובדים

מבחינה תיאורטית יהיה זה בלתי אפשרי לבצע הערכת שווי אופציות לעובדים על בסיס מודל רשת בינומי גדול מבלי להשתמש בתוכנת מחשב.[12] תוצאות הניתוח במאמר זה בוצעו באמצעות התוכנה להערכת שווי אופציות לעובדים שבנה כותב המאמר. תמונה 1, מציגה מודל מותאם אישית לחישוב אופציה אמריקאית באמצעות מודל רשת בינומי עם תקופת הבשלה, שיעורי חילוט, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית ומשתני הערכה גמישים כגון שערי ריבית חסרות סיכון וסטיות תקן המשתנים לאורך זמן.

התוכנה מיישמת הן מודלים סגורים כמו מודל Black & Scholes/מודל Black & Scholes הכללי והן מתודולוגיות מודל רשת בינומי. באמצעות השימוש במתודולוגיות מודל רשת בינומי, ניתן לחשב אופציות מורכבות יותר. לדוגמא, מודל מותאם אישית לחישוב אופציה אמריקאית (תמונה א) מראה כיצד משתנים רבים יכולים להשתנות לאורך זמן (כגון שיעור הריבית חסרת הסיכון, תשואת הדיבידנד, התנודתיות, שיעור החילוט, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וכו').

תמונה 1 מציגה את הפיתרון למקרה הבא:

- *מספר המניות המוענקות הינו 900,000*
- *מספר האופציות לעובדים המוענקות הינו 3,000*
- *שיעור החילוט הצפוי לשנה הוא 3%*
- *מחיר המניה במועד ההענקה הוא 30 ₪.*
- *מחיר המימוש הוא 30 ₪.*
- *משך החיים החוזי (Contractual term) של האופציות היא 10 שנים*
- *שיעור הריבית חסרת הסיכון לאורך משך החיים החוזי נע בין 1.5% ל- 4.3%*
- *התנודתיות הצפויה לאורך משך החיים החוזי נעה בין 40% ל- 60%*
- *תשואת הדיבידנד הצפויה משך החיים החוזי היא 1.0%*
- *פקטור המימוש הלא אופטימאלי הוא 2*

הדוגמא הנ"ל מניחה כי כל עובד מקבל מנה זהה של 300 אופציות. באמצעות 7 נתוני הקלט האחרונים מתוך הטבלה לעיל, מודל הרשת הבינומי מסוג Flexible Lattice Exercise Behavior נותן לנו שווי הוגן של $14.70 לאופציה. מודל הרשת משתמש בפקטור המימוש הלא אופטימאלי על מנת לחשב את משך החיים הצפוי (קרי, משך החיים הצפוי הוא פלט של מודל הרשת הבינומי) במקום לקחת את משך החיים הצפוי כנתון קלט נפרד. אם חברה משתמשת בנוסחת Black-Scholes-Merton לתמחור אופציות, הרי שעבורה משך החיים הצפוי ישמש כנתון קלט תחליפי לפקטור המימוש הלא אופטימלי.

[12] לדוגמא, מודל רשת בינומי עם 1,000 תקופות נפרדות ידרוש 2×10^{301} חישובים, ואפילו לאחר שנחבר את כל מחשבי העל המהירים ביותר בעולם ביחד , ייקח יותר זמן מחישוב חיי השמש!

תמונה 1 מציגה את התוצאה ברמה של $14.70, כאשר השימוש בשיעור החילוט של 3% נעשה מחוץ למודל כמרכיב דיסקאונט על מנת להקטין את הכמות לאורך זמן. התוכנה מאפשרת להקליד את שיעורי החילוט (לפני ואחרי ההבשלה) לתוך או מחוץ למודל. בדוגמא שלנו, קבענו כי שיעור החילוט יעמוד על 0%, על פיו מתקיימת הנחת הקצאה מלאה של האופציות המוענקות בתוכנית, בתמונה 1 התאמנו את הכמות מחוץ למודל על פי דרישות התקנים. לאמור- מספר האופציות הצפויות להבשיל נאמד במועד ההענקה בכ- 821,406 על פי החישוב הבא: $900{,}000\times(1-0.03)^3$.

מודל הרשת הבינומי מסוג Flexible Lattice Exercise Behavior

אופציה אמריקאית מותאמת אישית

פירוט הנחות העבודה:

מועד ההענקה (dd/yy/mmmm)	01/01/2006
שווי נכס הבסיס (₪)	$30.00
פרטי ההבשלה (dd/yy/mmmm)	31/12/2008
פקטור מימוש מוקדם (.)	2.00
שיעור מימוש מוקדם לפני הבשלה (%)	0.00%
שיעור מימוש מוקדם אחרי הבשלה (%)	0.00%
תוספת המימוש האפקטיבית (₪)	$30.00
מועד הפקיעה (dd/yy/mmmm)	31/12/2015

חישובי ביניים:

משך חיי כתב האופציה (.)	10.00
תקופת ההבשלה (.)	3.00

ריכוז תוצאות הערכת שווי כתב האופציה:

מודל Black & Scholes	19.24
מודל Black & Scholes הכללי	16.86
מודל הרשת הבינומי	14.70
איטרציות	161.0
מודל הרשת התרינומי	14.80
איטרציות	161.0

התאמות שבוצעו בהקשר ל:

שנה	שיעור הרווח השנתי לכתב אופציה (%)	שנה	סטיית תקן (%)	שנה	דיבידנד (%)
1	1.50%	1	40.00%	1	1.00%
2	1.93%	2	43.30%	2	1.00%
3	2.44%	3	44.73%	3	1.00%
4	2.89%	4	47.09%	4	1.00%
5	3.30%	5	49.41%	5	1.00%
6	3.67%	6	51.69%	6	1.00%
7	4.02%	7	53.95%	7	1.00%
8	4.08%	8	55.93%	8	1.00%
9	4.19%	9	57.96%	9	1.00%
10	4.30%	10	60.00%	10	1.00%

תמונה 1 – מודל אופציה מותאמת אישית

למעשה, באמצעות התוכנה להערכת שווי אופציות לעובדים ופונקצית "חתירה למטרה" בגיליון האלקטרוני (Excel), ניתן למצוא כי משך החיים הצפוי של האופציה הוא 6.69 שנים. ניתן להצדיק את השימוש ב- 6.99 שנים כנתון קלט במודל Black & Scholes הכללי על מנת לקבל תוצאה של $14.70, דבר שאינו ניתן לביצוע ללא שימוש בגישת מודל הרשת הבינומי.

8. הצדקה טכנית למתודולוגיה הנבחרת

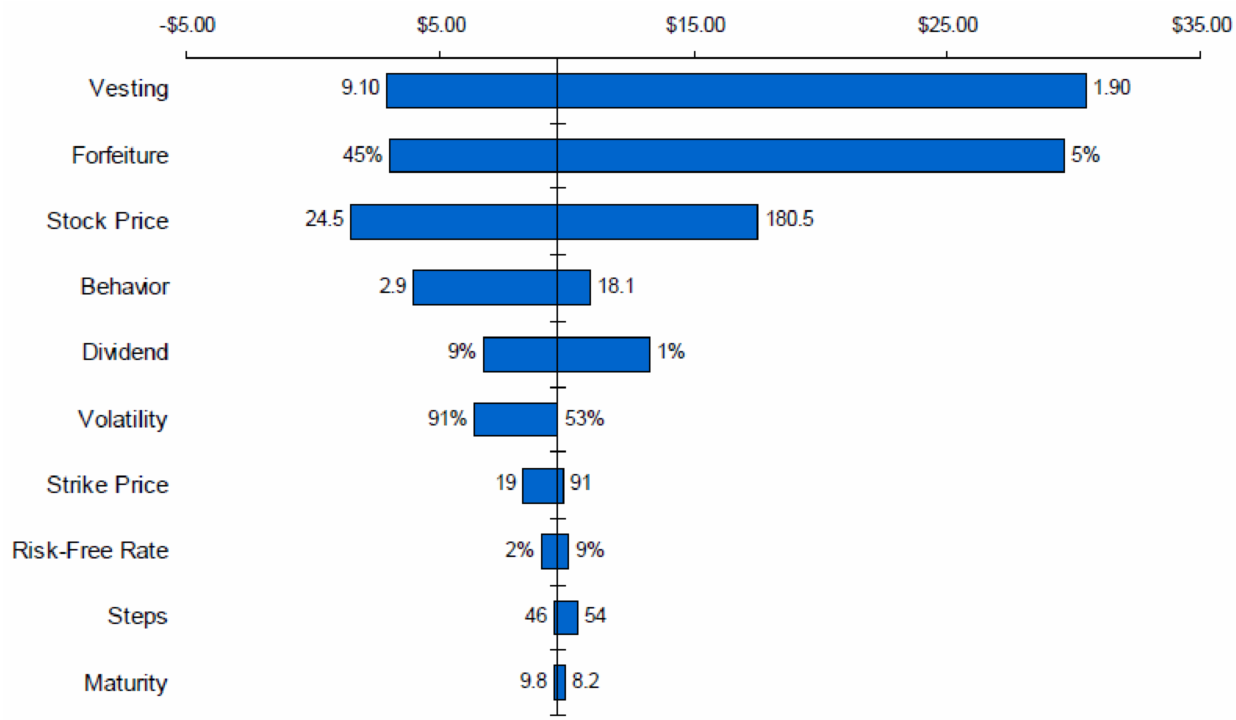
הפרק הזה ממחיש חלק מההצדקות הטכניות היוצרות את ההפרש בין המחיר לפי מודל Black & Scholes הכללי והמחיר על בסיס מודל הרשת הבינומי המותאם אישית. תמונה 2 מראה באמצעות תרשים tornado כיצד כל משתנה קלט במודל הרשת הבינומי המותאם אישית משפיע על ערך האופציה.[13] בהתבסס על התרשים, ניתן לומר שהתנודתיות (Volatility) אינה המשתנה העיקרי היחיד המשפיע על ערך האופציה. למעשה, כאשר מוסיפים את האלמנטים הבאים: תקופת ההבשלה (Vesting), שיעור החילוט (Forfeiture) והתנהגות מימוש לא אופטימאלית (Behavior) למודל, ההשפעה שלהם דומיננטיות יותר מהשפעת התנודתיות. התרשים שלמטה מבוסס על מקרה פרטי ולא ניתן להכללה לגבי כל המקרים.

מאידך, התנודתיות היא משתנה משמעותי במודל הפשוט של Black & Scholes כפי שניתן לראות בתמונה 3. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שקיימת פחות אינטראקציה בין משתני הקלט אודות למספרם הקטן, ועבור מרבית האופציות לעובדים המונפקות "בכסף", התנודתיות משחקת משחק חשוב כאשר אין שום נתוני פלט דומיננטיים מלבדה.

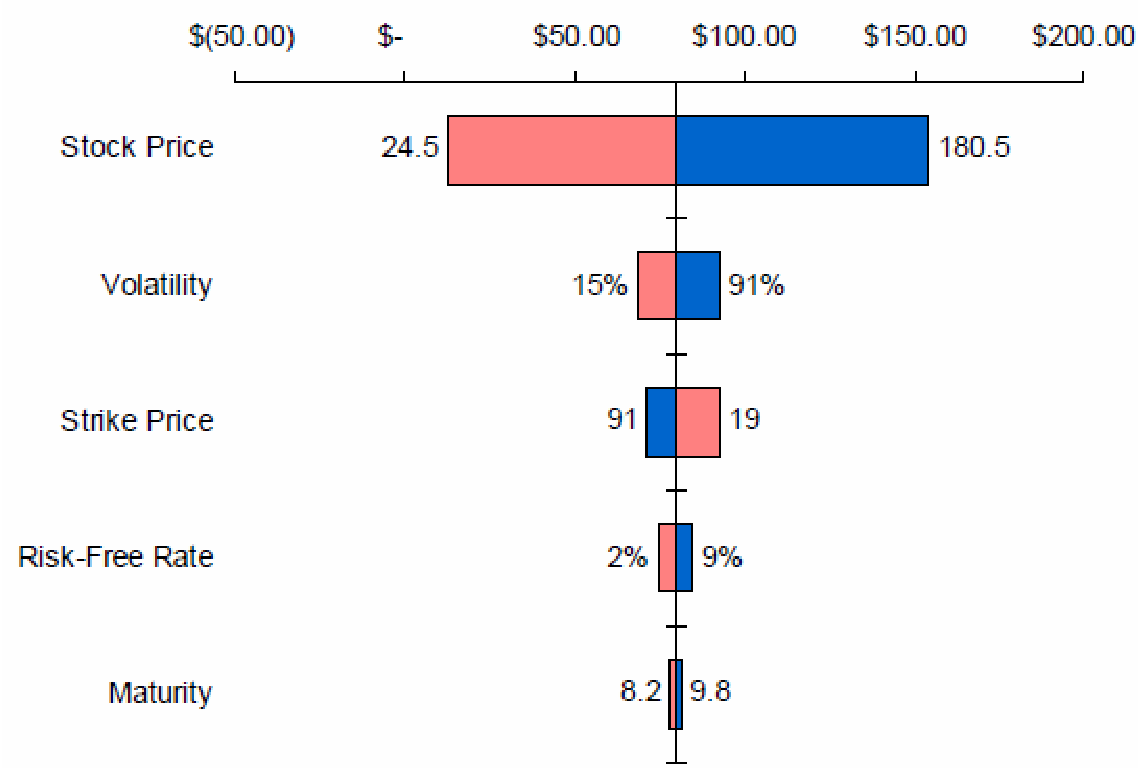
בנוסף, האינטראקציות בין משתני הפלט החדשים אינן ליניאריות. תמונה 4 מציגה תרשים spider[14] וניתן לראות כי הפקטורים הבאים: תקופת ההבשלה, שיעורי החילוט ומכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית אינם משפיעים ליניארית על ערך האופציה. זו הסיבה, שהקווים בתרשים מסוג spider אינם ישרים אלא עקומים באזורים מסוימים, מה שמצביע על השפעות לא ליניאריות במודל. משמע, לא ניתן להכליל את השפעותיהם של שלושת המשתנים הללו על ערך האופציה (לדוגמה, לא ניתן להכליל ולומר שאם עלייה של נקודת אחוז בשיעור החילוט מביאה תביא לירידת ערך האופציה ב- 2.35%, או אז עלייה של 2% בשיעור החילוט תגרום לירידת ערך האופציה ב- 4.70% וכך הלאה). הסיבה לכך היא מאחר והמשתנים משפיעים אחד על השני באופן שונה עבור רמות שונות של נתוני פלט. המסקנה היא שבאמת לא ניתן לומר אפריורית מהן ההשפעות הישירות של שינוי משתנה אחד על הגודל של ערך האופציה הסופי. לאמור- עבור כל מקרה יש לבצע ניתוח מפורט.

[13] תרשים tornado עורך רשימה של כל נתוני הקלט המניעים את המודל, כך שבראש הרשימה נמצא המשתנה בעל ההשפעה הגדולה ביותר על התוצאות. התרשים מתקבל ע"י כך שכל פעם מקלידים נתון קלט בטווח קבוע (למשל ±10% מהמקרה הבסיסי) והשוואת התוצאות למקרה הבסיסי).

[14] תרשים spider נראה כמו עכביש עם מרכז מסה והרגליים הרבות שלו הנשלחות לכל כיוון. הקווים בעלי שיפוע חיובי מציינים קשר חיובי (למשל ככל שמחיר המניה גבוה יותר כך ערך האופציה גבוה יותר כפי שעולה מתמונה 3), בשעה שהקווים בעלי שיפוע שלילי מציינים קשר שלילי. בנוסף, ניתן להשתמש בתרשימים מסוג spider על מנת לראות קשרים ליניאריים ולא ליניאריים.

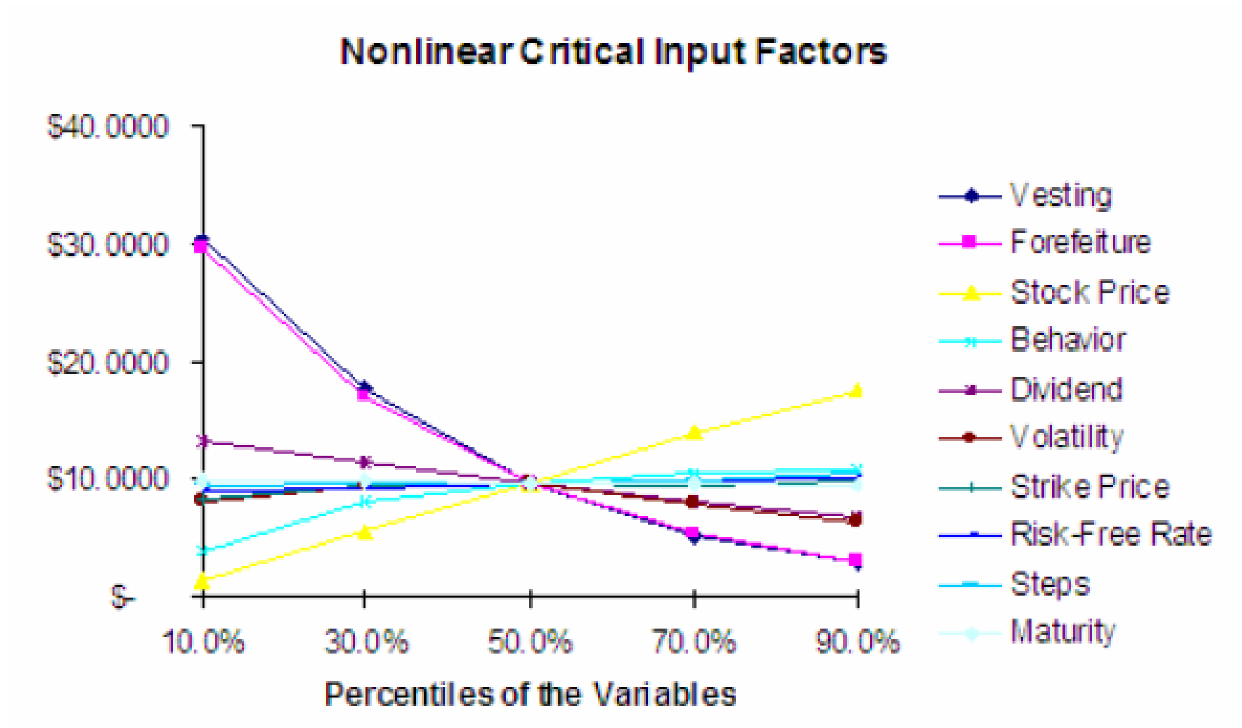


תמונה 2 – תרשים tornado המציג רשימה של פקטורי הקלט הקריטיים של מודל הרשת הבינומי המותאם אישית[15]



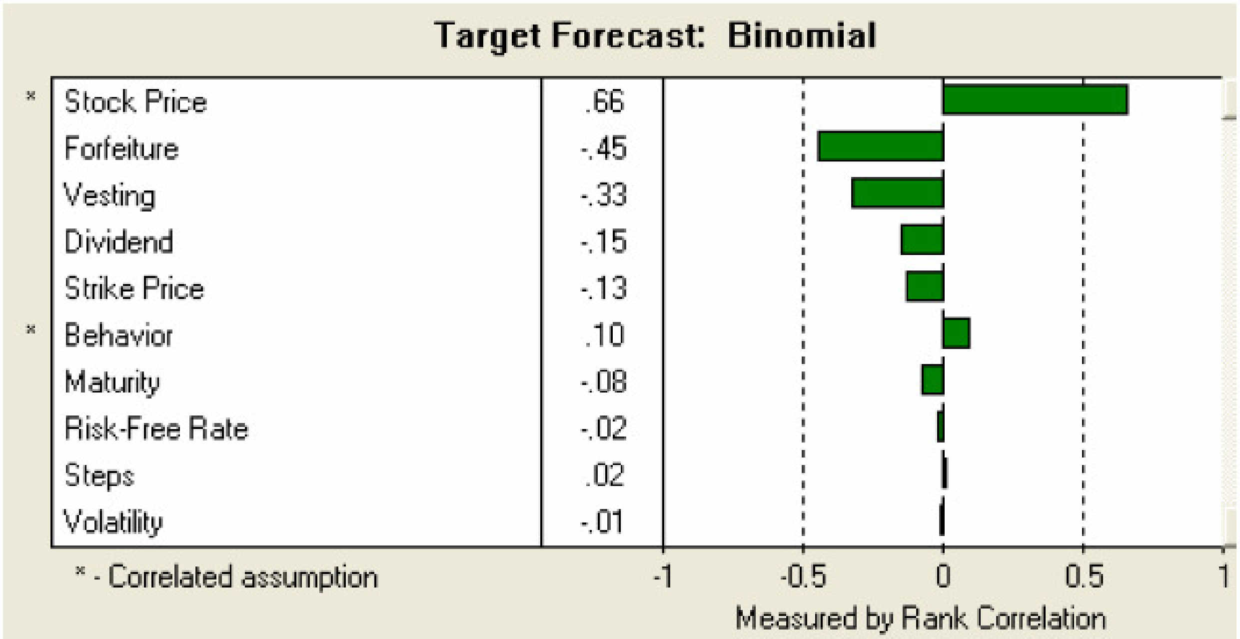
תמונה 3 – תרשים tornado המציג רשימה של פקטורי הקלט הקריטיים של מודל Black & Schools

[15] רמות שונות של נתוני קלט מניבות תרשימי tornado שונים אולם ברב המקרים, התנודתיות אינה המשתנה השולט. שיעורי החילוט, תקופת ההבשלה ומכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית כולם נוטים להיות דומיננטיים יותר או דומיננטיים כמו התנודתיות.



תמונה 4 – תרשים spider המציג השפעות לא ליניאריות של פקטורי הקלט במודל הרשת הבינומי

למרות שתרשימי tornado ו-spider מראים את השפעתו של כל אחד ממשתני הקלט על ערכה הסופי של האופציה, ההשפעות שלהם הן סטטיות. דהיינו, כאשר מטפלים במשתנה אחד בכל פעם על מנת לקבוע את ההסתעפויות שלו על ערך האופציה. בכל אופן, כמוצג, ההשפעות לעיתים אינן לינאריות, קרי, יש לשנות את כל המשתנים סימולטנית על מנת להביא בחשבון את האינטראקציות שלהם. תמונה 5 מציגה תרשים רגישות דינאמי של סימולציית Monte Carlo, כאשר שיעור החילוט, תקופת ההבשלה ומכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית נקבעים כמשתנים חשובים, בשעה שהתנודתיות פעם נוספת מורדת לדרגה פחות חשובה. תרשים הרגישות הדינמי מבלגן ומבלבל את כל משתני הפלט סימולטנית באלפי הרצות (trials), ותופס את ההשפעות על ערך האופציה. גישה זו הינה בעלת ערך בתפיסת השפעות האינטראקציה הנקיות בין משתנים ברמות שונות של נתוני קלט.



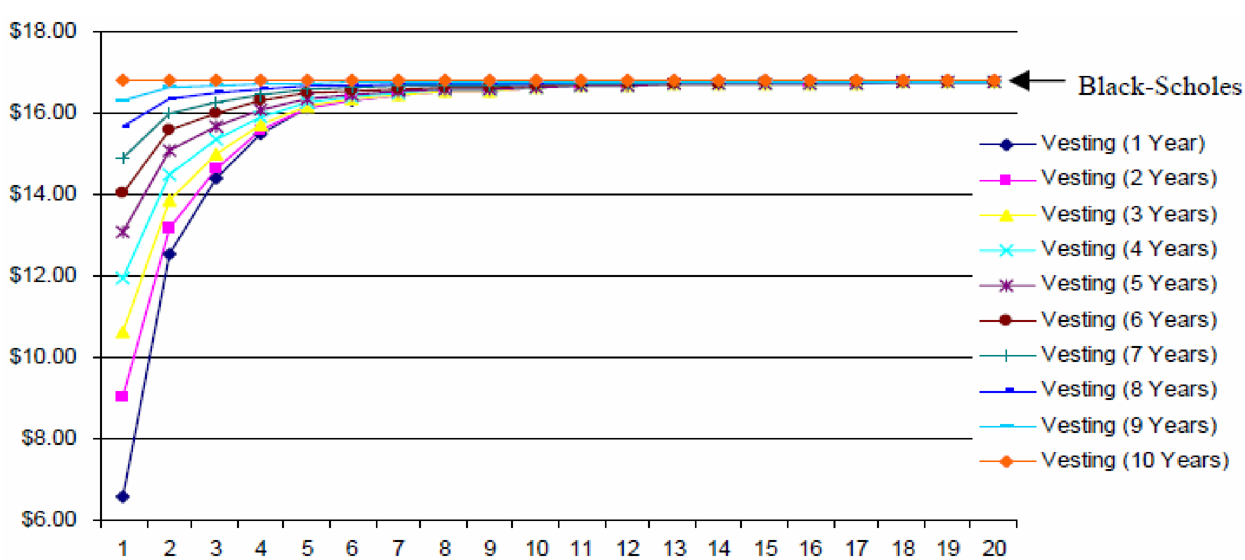
תמונה 5 – תרשים רגישות דינמי עם פקטורי קלט המשתנים סימולטנית במודל הרשת הבינומי

מניתוח הרגישות המקדמי הזה, ניתן להסיק כי שילוב של שיעורי חילוט, תקופת הבשלה ומכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית חיוני ואף נחוץ לביצוע הערכת שווי הוגן של אופציות לעובדים אודות לתרומות המשמעותיות לערך האופציה. בנוסף, לא ניתן להכליל את השפעותיו של כל אחד ממשתני הקלט על ערך האופציה הסופי. לאמור- בכל פעם יש לבצע ניתוח מפורט על מנת לקבל את ערך האופציה.

9. אופציות עם תקופת הבשלה והתנהגות לא אופטימאלית[16]

חקירה נוספת של האלמנטים הבאים: התנהגות לא אופטימאלית ותקופת הבשלה, מניבה את התרשים המוצג בתמונה 6. ניתן לראות כי עבור מכפילים התנהגות מימוש לא אופטימאלית נמוכים (בטווח של 1 עד 6) ערך האופציה יכול להיות נמוך משמעותית מהערך שנחזה באמצעות מודל Black & Scholes. עבור אופציה עם תקופת הבשלה של 10 שנים, התוצאות זהות בהתעלם ממכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית – הקו השטוח שלו נושא את אותו הערך כמו תוצאת מודל Black & Scholes. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שאופציה עם תקופת הבשלה של 10 שנים מתוך משך חיים של 10 שנים הופכת לאופציה אירופאית מושלמת, הניתנת למימוש במועד הפקיעה בלבד. במקרה הזה, מודל Black & Scholes מספק את התוצאה הנכונה.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לערך האופציה על בסיס המודל הבינומי ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וב- (ii) תקופת ההבשלה:



תמונה 6 – ההשפעה של התנהגות מימוש לא אופטימאלית ותקופת הבשלה על ערכה של אופציה במודל הרשת הבינומי[17]

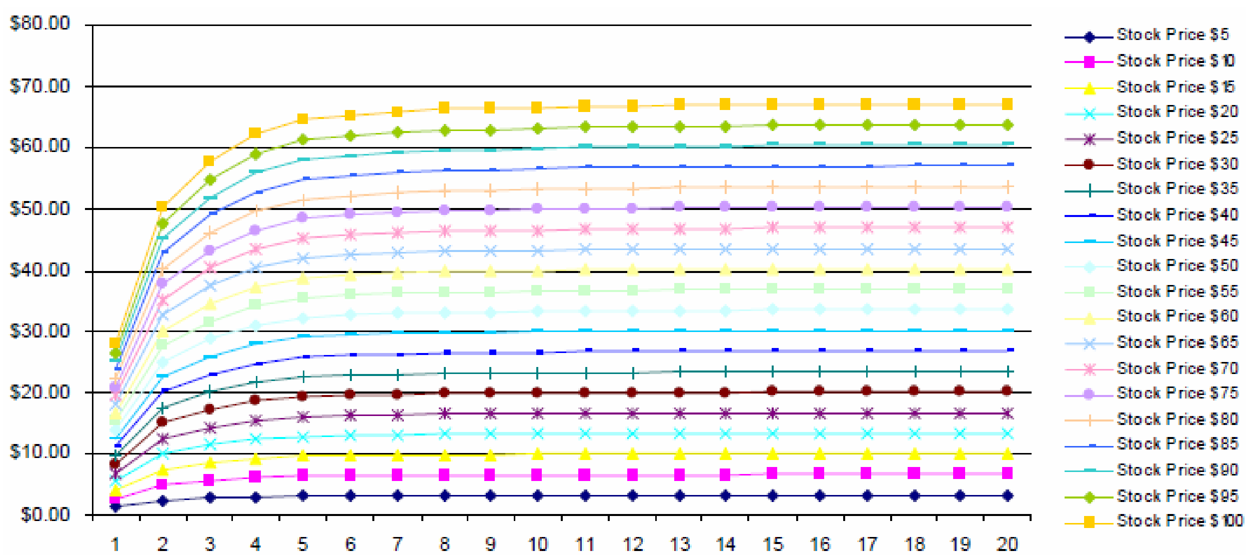
מכל מקום, כאשר מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית נמוך, ערך האופציה קטן. זאת מאחר והעובדים המחזיקים באופציה יטו לממש את האופציה באופן לא אופטימאלי – קרי, האופציה תמומש מוקדם במחיר מניה הנמוך מהמחיר האופטימאלי. לכן, הערך העליון (upside value) של האופציה אינו ממוקסם. כך לדוגמא, נניח כי מחיר המימוש הוא $10 בזמן שמניית הבסיס מאוד תנודתית. אם העובד מממש את האופציה במחיר של $11 (משמע,

[16] פרטים נוטים להפגין התנהגות מימוש לא אופטימאלית כתוצאה ממספר סיבות – כגון: הצורך בנזילות, שנאת סיכון, העדפות אישיות, ציפיות וכיוב'.

[17] פירוט ההנחות: מחיר מניה ומחיר מימוש של $25, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 50%, תשואת הדיבידנד 0%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית בטווח של 1-20, תקופת הבשלה של 1-10 שנים. ההנחות נבחנו עם 100-5,000 איטרציות.

מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.10), הוא עשוי שלא לתפוס את מלוא הפוטנציאל העליון של האופציה, כאשר מחיר המניה יכול לעלות בצורה משמעותית מעל ל- $11 בהסתמך על התנודתיות. נשווה זאת לעובד נוסף המממש את האופציה כאשר מחיר המניה הוא $20 (מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 2.0) מול עובד המממש במחיר מניה הרבה יותר גבוה. לכן, ככל שמכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית נמוך יותר כך השווי ההוגן של האופציה נמוך יותר. למעשה, השפעתה של התנהגות מימוש לא אופטימאלית גדולה יותר כאשר חוזים במועד ההענקה כי מחירי המניות יהיו גבוהים יותר. תמונה 7 מראה (בקצה הנמוך של המכפילים הלא אופטימאליים) כי ככל שמחיר המניה ההתחלתי במועד ההענקה גבוה יותר כך השיפוע תלול יותר.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לערך האופציה על בסיס המודל הבינומי ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וב- (ii) מחיר המניה:

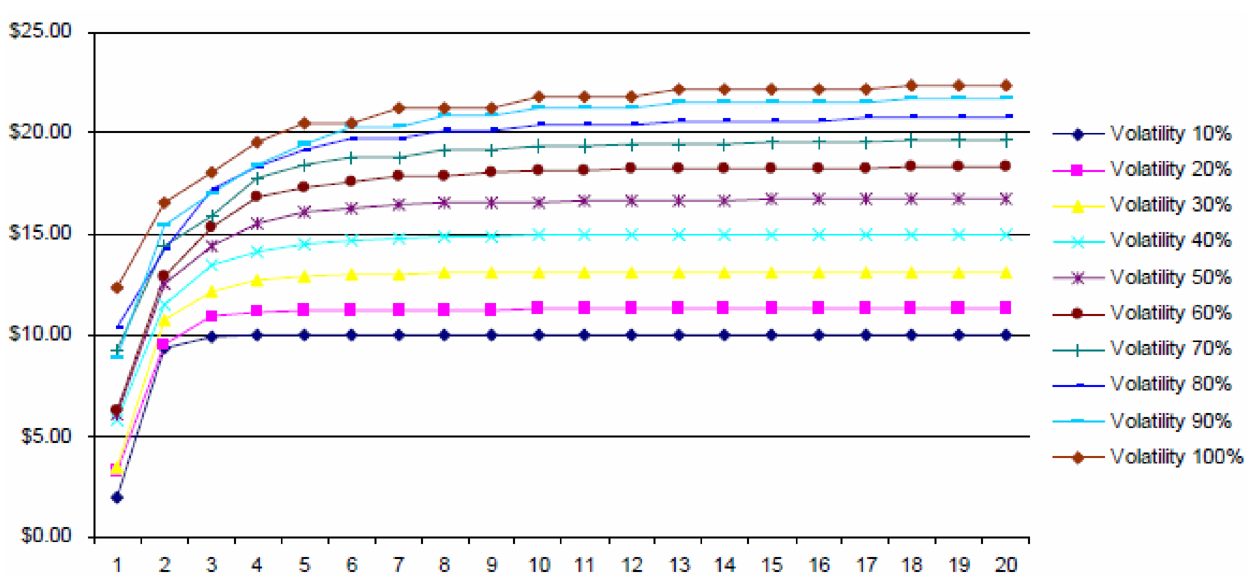


תמונה 7 – ההשפעה של התנהגות לא אופטימאלית ומחיר המניה על ערכה של אופציה במודל הרשת הבינומי[18]

מתמונה 8 עולה כי עבור מניות עם תנודתיות גבוהה יותר, האזור המימוש הלא אופטימאלי גדול יותר וההשפעה על ערך האופציה גדולה יותר, אולם ההשפעה היא הדרגתית. כך לדוגמא, עבור מניה עם תנודתיות של 100% (תמונה 8), אזור המימוש הלא אופטימאלי גדל ממכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.0 למכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של כ- 9.0 בהשוואה למניה עם תנודתיות של 10% שאזור המימוש הלא אופטימאלי שלה גדל ממכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.0 למכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של כ- 2.0. בנוסף, המרחק האנכי עבור מניה עם תנודתיות של 100% גדל ממחיר מניה של $12 למחיר מניה של $22 בטווח של $10, בהשוואה למניה עם תנודתיות שהמרחק האנכי שלה גדל ממחיר מניה של $2 למחיר מניה של $10 בטווח של $8. על כן, ככל שמחיר המניה במועד ההענקה גדול יותר והתנודתיות גדולה יותר, כך ההשפעה של התנהגות לא אופטימאלית על ערך האופציה תהיה גדולה יותר.

[18] פירוט ההנחות: מחיר מניה ומחיר מימוש בטווח של $5-$100, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 50%, תשואת הדיבידנד 0%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית בטווח של 1-20, תקופת הבשלה של 4 שנים. ההנחות נבחנו עם 100-5,000 איטרציות.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לערך האופציה על בסיס המודל הבינומי ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וב- (ii) תנודתיות:



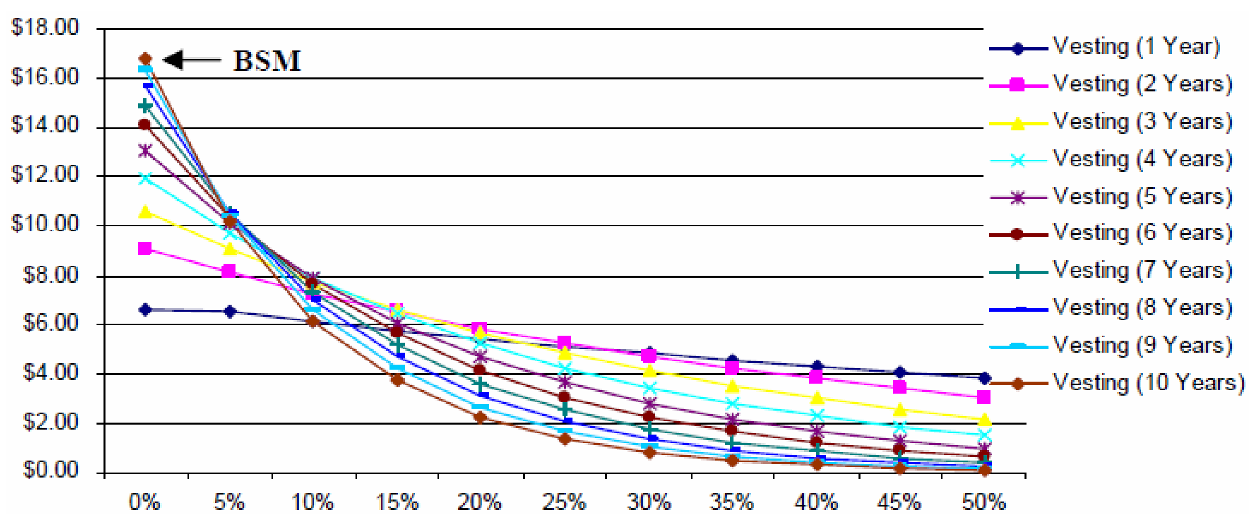
תמונה 8 – ההשפעה של התנהגות לא אופטימאלית והתנודתיות על ערכה של אופציה במודל הרשת הבינומי[19]

[19]פירוט ההנחות: מחיר מניה ומחיר מימוש של $25, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות בטווח של 10%- 100%, תשואת הדיבידנד 0%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית בטווח של 1-20, תקופת הבשלה של 4 שנים. ההנחות נבחנו עם 100- 5,000 איטרציות.

10. אופציות עם שיעורי חילוט

תמונה 9 מתארת את הירידה בערך האופציה כאשר שיעורי החילוט עולים. שיעור הירידה משתנה כפונקציה של תקופת ההבשלה. ככל שתקופת ההבשלה ארוכה יותר, כך השפעתם של חילוטים תהיה משמעותית יותר. מה שמראה פעם נוספת את קשר ההשפעה ההדדית הלא ליניארית בין תקופת ההבשלה וחילוטים (זו הסיבה מדוע הקווים בתמונה 9 עקומים ולא ליניאריים). זה אינטואיטיבי מאחר וככל שתקופת ההבשלה ארוכה יותר, כך ההסתברות שהעובדים ימשיכו להיות מועסקים בחברה נמוכה יותר והסיכויים שחילוטים יורידו את הערך הצפוי של האופציה נמוכים יותר. שוב ניתן לראות שתוצאת מודל Black & Scholes נותנת את הערך האפשרי הגבוה ביותר בהנחה של תקופת הבשלה בת 10 שנים עבור אופציה עם משך חיים של 10 שנים עם שיעור חילוט של אפס (תמונה 9). בנוסף, שיעורי חילוט יכולים להיות מתואמים שלילית עם מחיר המניה – אם החברה מציגה רווחים, מחיר המניה שלה בדר״כ עולה, מה שהופך את האופציה לבעלת ערך גבוה יותר ומה שגורם לכך שפחות סביר שהעובדים יעזבו ופחות מתקבל על הדעת שהחברה תפטר את עובדיה. מאחר ושיעורי החילוט אינם וודאיים (תנודות בשיעורי החילוט בדך כלל התרחשו בעבר בשל מציאות כלכלית וסביבה העסקית התרחשו תנודות בשיעורי החילוט, ובוודאי שבעתיד יחולו שוב תנודות בשיעורי החילוט) ואף מתואמים שלילית עם מחיר המניה, אנו יכולים להריץ סימולציית Monte Carlo מתואמת על שיעורי החילוט ביחד עם מודלי רשת בינומיים מתואמים אישית – אשר יוצגו בהמשך. **מודל Black & Scholes תמיד ייתן את ערך האופציה המקסימאלי בהנחה שכל האופציות הבשילו במלואן ויגדיל את הוצאות האופציה בצורה משמעותית.** התוכנה להערכת שווי אופציות לעובדים יכולה להביא בחשבון שיעורי חילוט שונים לפני ואחרי ההבשלה.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב ״What if״, לערך האופציה על בסיס המודל הבינומי ביחס לשינויים ב- (i) ההסתברות לחילוט וב- (ii) תקופת ההבשלה:



תמונה 9 – ההשפעה של שיעורי חילוט ותקופת הבשלה על ערכה של אופציה במודל הרשת הבינומי[20]

[20]פירוט ההנחות: מחיר מניה ומחיר מימוש של $25, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות בטווח של 50%, תשואת הדיבידנד 0%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.01, תקופת הבשלה של 1-10 שנים, שיעורי חילוט בטווח של 0%-50%. ההנחות נבחנו עם 100-5,000 איטרציות.

11. אופציות עם שערי ריבית המשתנים לאורך זמן

הנחת קלט נוספת היא שיעור הריבית חסרת הסיכון. תמונה 10 מתארת את ההשפעות של שינוים בשיעורי הריביות חסרות הסיכון לאורך זמן על הערכת שווי אופציה. כאשר מוסיפים נתוני קלט אקזוטיים אחרים, או אז מודל רשת עם שיעורי ריביות משתנים נותן הערכת שווי נמוכה. בנוסף, בשל ערך הזמן של הכסף, היוון גדול יותר בעתיד יוריד את ערך האופציה. במילים אחרות, תמונה 10 משווה בין עקום תשואות חסר סיכון עולה, עקום תשואות חסר סיכון יורד, עקום תשואות חסר סיכון "מחייך" (risk-free rate smile) ועקום תשואות חסר סיכון "כועס" (risk-free rate frown). כאשר המבנה העתי של שערי הריבית עולה לאורך זמן, ערך האופציה המחושב באמצעות מודל רשת בינומי המתואם לשיעורי ריביות חסרות הסיכון המשתנים עם הזמן נמוך יותר ($24.31) מערך האופציה במקרה הבסיסי שבו מחושב ממוצע שיעורי הריביות חסרות הסיכון המשתנים עם הזמן ($25.92). ההפך נכון לעקום תשואה חסר סיכון יורד. בנוסף תמונה 10 מציגה עקום תשואות חסר סיכון "כועס" (בהתחלה שערי ריבית נמוכים, אח"כ שערי ריבית גבוהים ולבסוף שוב פעם שערי ריבית גבוהים) . התוצאה מראה כי שימוש בממוצע פשוט יביא להערכת יתר בעבור עקום תשואות חסר סיכון עולה, להערכת חסר בעבור עקום תשואות חסר סיכון יורד, להערכת חסר בעבור עקום תשואות חסר סיכון "מחייך", והערכת יתר עבור עקום תשואות חסר סיכון "כועס". על כן, מתי שניתן, מוטב להשתמש בכל האינפורמציה הזמינה בהקשר של שערי רבית פורוורד, שיעור ריבית לכל שנה.

	פרמטרים בסיסיים	**שנה**	**מקרה בסיסי**	**עקום תשואות עולה**	**עקום תשואות יורד**	**עקום תשואות "מחייך"**	**עקום תשואות "כועס"**
מחיר המניה	$100.00	1	5.50%	1.00%	10.00%	8.00%	3.50%
מחיר המימוש	$100.00	2	5.50%	2.00%	9.00%	7.00%	4.00%
משך החיים	10.00	3	5.50%	3.00%	8.00%	5.00%	5.00%
התנודתיות	45.00%	4	5.50%	4.00%	7.00%	4.00%	7.00%
תשואת הדיבידנד	4.00%	5	5.50%	5.00%	6.00%	3.50%	8.00%
איטרציות	1000	6	5.50%	6.00%	5.00%	3.50%	8.00%
התנהגות לא אופטימלית	1.80	7	5.50%	7.00%	4.00%	4.00%	7.00%
תקופת הבשלה	4.00	8	5.50%	8.00%	3.00%	5.00%	5.00%
שיעור חילוט	10.00%	9	5.50%	9.00%	2.00%	7.00%	4.00%
		10	5.50%	10.00%	1.00%	8.00%	3.50%
		ממוצע	**5.50%**	**5.50%**	**5.50%**	**5.50%**	**5.50%**
מודל Black & scholes ושימוש בממוצע של 5.50%			**$37.45**	**$37.45**	**$37.45**	**$37.45**	**$37.45**
מודל Black & scholes מתוקנן לחילוט ושימוש בממוצע של 50%			**$33.71**	**$33.71**	**$33.71**	**$33.71**	**$33.71**
מודל רשת בינומי עם שערי ריבית משתנים			**$25.92**	**$24.31**	**$27.59**	**$26.04**	**$25.76**

תמונה 10 – ההשפעה של שערי ריבית משתנים על ערך האופציה[21]

[21] התוצאות מראות רק מקרה פרטי ואינן תקפות לגבי כל המקרים האפשריים.

12. אופציות עם סטיות תקן המשתנות לאורך זמן

תמונה 11 מתארת את השפעתם של סטיות תקן משתנות על אופציות לעובדים. אם התנודתיות משתנה לאורך זמן, מודל Black & Scholes ‏($71.48) העושה שימוש בממוצע התנודתיות לאורך זמן יביא תמיד להערכת יתר של ערך האופציה האמיתי כאשר ישנם נתוני קלט אקזוטיים אחרים. בנוסף, בהשוואה למקרה הבסיסי ($38.93), מבנה עתי של סטיות תקן העולה באיטיות לאורך זמן מרמה נמוכה יהיה בעל ערכי אופציה נמוכים יותר, בשעה שהן מבנה עתי של סטיות תקן יורד, הן מבנה עתי של סטיות תקן "מחייך" והן מבנה עתי של סטיות תקן "כועס" יהיו בעלי ערכי אופציה גבוהים יותר מאשר ערכי אופציה המתקבלים משימוש בממוצע התנודתיות.

	פרמטרים בסיסיים	**שנה**	**מקרה בסיסי**	**תנודתיות עולה**	**תנודתיות יורדת**	**תנודתיות "מחייכת"**	**תנודתיות "כועסת"**
מחיר המניה	$100.00	1	55.00%	10.00%	100.00%	80.00%	35.00%
מחיר המימוש	$100.00	2	55.00%	20.00%	90.00%	70.00%	40.00%
משך החיים	10.00	3	55.00%	30.00%	80.00%	50.00%	50.00%
שיעור הריבית	5.00%	4	55.00%	40.00%	70.00%	40.00%	70.00%
תשואת הדיבידנד	0.00%	5	55.00%	50.00%	60.00%	35.00%	80.00%
איטרציות	10	6	55.00%	60.00%	50.00%	35.00%	80.00%
התנהגות לא אופטימלית	1.80	7	55.00%	70.00%	40.00%	40.00%	70.00%
תקופת הבשלה	4.00	8	55.00%	80.00%	30.00%	50.00%	50.00%
שיעור חילוט	10.00%	9	55.00%	90.00%	20.00%	70.00%	40.00%
		10	55.00%	100.00%	10.00%	80.00%	35.00%
		ממוצע	**55.00%**	**55.00%**	**55.00%**	**55.00%**	**55.00%**
מודל Black & scholes ושימוש בממוצע של 55%			**$71.48**	**$71.48**	**$71.48**	**$71.48**	**$71.48**
מודל Black & scholes מתוקנן לחילוט ושימוש בממוצע של 55%			**$64.34**	**$64.34**	**$64.34**	**$64.34**	**$64.34**
מודל רשת בינומי עם שערי ריבית משתנים			**$38.93**	**$32.35**	**$45.96**	**$39.56**	**$39.71**

תמונה 11 – ההשפעה של סטיות תקן משתנות על ערך האופציה

13. אופציות עם תשואות דיבידנד המשתנות לאורך זמן

תשואת הדיבידנד היא דוגמא לנתון קלט הניתן לחילוץ ממדיניות הדיבידנד של החברה או מנתוני שוק היסטוריים זמינים ציבוריים. תשואת דיבידנד היא סך הדיבידנדים המחושבים כאחוז ממחיר המניה המחולקים במהלך כל שנה. תשואת הדיבידנד האופיינית היא בין 0% ל- 7%. למעשה, כ- 45% מהחברות הציבוריות הנסחרות בארה"ב מחלקות דיבידנד, כאשר ל- 85% מאלו המחלקות דיבידנד יש תשואת דיבידנד של 7% או פחות, ול- 95% מהן יש תשואת דיבידנד של 10% או פחות.[22] תשואת הדיבידנד היא משתנה מעניין עם מעט מאוד אינטראקציה עם משתני קלט אקזוטיים אחרים. לתשואת הדיבידנד השפעה כמעט לינארית (close-to-linear) על ערך האופציה להבדיל מנתוני הקלט האקזוטיים האחרים. כך למשל, תמונה 12 מתארת את ההשפעות של זמני פקיעה שונים על אותה אופציה.[23] ככל שהזמן לפקיעה ארוך יותר, כך ערך האופציה גדול יותר אך עולה בשיעור יורד.

מכפיל התנהגות 1.8, תקופת הבשלה שנה, שיעור חילוט 10%

פקיעה	ערך האופציה	שינוי
1	$25.16	
2	$32.41	28.84%
3	$35.35	9.08%
4	$36.80	4.08%
5	$37.87	2.91%
6	$38.41	1.44%
7	$35.58	0.43%

תמונה 12 – ההשפעות הלא ליניאריות של הזמן לפקיעה

מאידך, תמונה 13 מראה את ההשפעות הכמעט ליניאריות של תשואות הדיבידנד, אפילו כשכמה ממשתני הקלט האקזוטיים השתנו. ניתן לומר כי ההשפעות של תשואות הדיבידנד יהיו תמיד קרובות לליניאריות, בהתעלם מהשינוי במשתנה הנ"ל. בשעה שתמונה 13 מראה אופציות רבות עם תשואות דיבידנד ייחודיות, תמונה 14 מראה את השפעותיהן של תשואות דיבידנד המשתנות לאורך זמן על מניה בודדת. על כן, תוצאות תמונה 13 מבוססות על השוואת אופציות שונות עם תשואות דיבידנד שונות, בעוד שתוצאות תמונה 14 מבוססות על אופציה בודדת שתשואות הדיבידנד של מניית הבסיס שלה משתנות לאורך חיי האופציה.[24]

[22] תוך 6,553 מניות שנותחו, 2,924 מתוכם מחלקות דיבידנד, כאשר ל- 2,140 מתוכם יש תשואת דיבידנד של 5% או פחות, ל- 2,282 יש תשואת דיבידנד של 6% או פחות, ל- 2,503 יש תשואת דיבידנד של 7% או פחות ול- 2,830 יש תשואת דיבידנד של 10% או פחות.

[23] מחיר מניה ומחיר מימוש של $100, משך חיים של 5 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 75%, 1,000 איטרציות במודל הרשת הבינומי המותאם אישית. משתני קלט אקזוטיים אחרים רשומים בתמונה 13.

[24] מחיר מניה ומחיר מימוש של $100, משך חיים של 5 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 75%, 1,000 איטרציות במודל הרשת הבינומי המותאם אישית. מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.8, שיעור חילוט 10% ותקופת הבשלה של שנה.

תשואת דיבידנד	מכפיל התנהגות 1.8, תקופת הבשלה 4 שנים, שיעור חילוט 10% ערך האופציה	שינוי	מכפיל התנהגות 1.8, תקופת הבשלה שנה, שיעור חילוט 10% ערך האופציה	שינוי	מכפיל התנהגות 3.0, תקופת הבשלה שנה, שיעור חילוט 10% ערך האופציה	שינוי
0%	$42.15		$42.41		$49.07	
1%	$39.94	-5.24%	$41.47	-2.20%	$47.67	-2.86%
2%	$37.84	-5.27%	$40.55	-2.22%	$46.29	-2.89%
3%	$35.83	-5.30%	$39.65	-2.24%	$44.94	-2.92%
4%	$33.92	-5.33%	$38.75	-2.26%	$43.61	-2.95%
5%	$32.10	-5.37%	$37.87	-2.28%	$42.31	-2.98%

תשואת דיבידנד	מחיר מניה 50$, מכפיל התנהגות 1.8, תקופת הבשלה שנה, שיעור חילוט ערך האופציה	שינוי	מכפיל התנהגות 1.8, תקופת הבשלה שנה, שיעור חילוט 5% ערך האופציה	שינוי
0%	$21.20		$45.46	
1%	$20.74	-2.20%	$44.46	-2.20%
2%	$20.28	-2.22%	$43.47	-2.23%
3%	$19.82	-2.24%	$42.29	-2.25%
4%	$19.37	-2.26%	$41.53	-2.27%
5%	$18.93	-2.28%	$40.58	-2.29%

תמונה 13 – ההשפעות הליניאריות של תשואות הדיבידנד

ניתן לראות בבירור כי לאופציה עם תשואות דיבידנד המשתנות לאורך זמן יש ערך מוסף במונחים של תוצאות הערכת שווי אופציות. על כן, אם מניית החברה מחלקת דיבידנד, או אז הניתוח צריך לכלול את האפשרות שתשואות הדיבידנד ישתנו לאורך חיי האופציה.

תרחיש	ערך האופציה	שינוי	הערות
דיבידנד 3% קבוע	$39.65	0.00%	תשואות הדיבידנד נשארות קבועות ברמה של 3%
עלייה הדרגתית	$40.94	3.26%	1% עד 5% בעליות של 1% (ממוצע של 3%)
ירידה הדרגתית	$38.39	-3.17%	5% עד 1% בירידות של 1% (ממוצע של 3%)
עליה בקפיצות	$41.70	5.19%	0%, 0%, 5%, 5%, 5% (ממוצע של 3%)
ירידה בקפיצות	$38.16	-3.74%	5%, 5%, 5%, 0%, 0% (ממוצע של 3%)

תמונה 14 – ההשפעות של תשואות הדיבידנד המשתנות לאורך זמן

14. אופציות עם תקופות חסימה קיימות

פריט מעניין נוסף הוא תקופות חסימה (blackout periods). אלו הם תאריכים שבהם לא ניתן לממש אופציות לעובדים. על פי רוב, תאריכי החסימה הן בדר״כ מספר שבועות לפני ומספר שבועות אחרי הודעות לבורסה על רווחים (בדר״כ על בסיס רבעוני). בנוסף, רק באופציות למנהלים בכירים עם אחריות כבדה נראה את תאריכי החסימה הללו, כלומר, שיעורם נמוך יחסית בהשוואה לשאר החברה. תמונה 15 מתארת את החישובים עבור אופציה לעובדים טיפוסית עם תאריכי חסימה שונים.[25] במקרה המתואר בו ישנם רק כמה ימי חסימה בחודש, קיים הבדל דק בין אופציות עם תאריכי חסימה לבין אלו שללא תאריכי חסימה. למעשה, אם מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית קטן (במקרה המתואר מונח יחס של 1.8). תאריכי חסימה בזמנים אסטרטגיים למעשה ימנעו ממחזיק האופציה לממשה באופן לא אופטימאלי ולעיתים אף יעלו מעט את ערך האופציה.

תאריכי חסימה	**ערך האופציה**
ללא חסימות	$43.16
כל שנתיים במרווחים זהים	$43.16
חמש השנים הראשונות חסימות שנתיות בלבד	$43.26
חמש השנים האחרונות חסימות שנתיות בלבד	$43.16
כל שלושה חודשים למשך עשר שנים	$43.26

תמונה 15 – ההשפעות של תקופות חסימה על ערך האופציה

הניתוח בתמונה 15 מניח אחוז קטן של תאריכי חסימה בשנה (למשל, במשך מספר ימים בשנה, אופציה לעובדים אינה ניתנת למימוש). הוא הדין לגבי חברות מסוג brick-and-mortar (חברות הפוגשות את הלקוחות שלהן במשרד או חנות שבבעלותן או שהן שוכרות, למשל המכולת השכונתית והבנק המקומי) וכו' שכן ניתן להתעלם מתאריכי חסימה באופציות אלו. בכל אופן, בחברות אחרות כמו למשל כאלו שבתעשיית הביוטכנולוגיה או בתעשיית ההיי-טק, תקופות חסימה משחקות משחק יותר משמעותי. למשל, בחברת ביו-טק, תקופות חסימה יכול שימשכו בין 4 ל- 6 שבועות בכל רבעון. בנוסף, יכול שיהיו תקופות חסימה קודם לשחרור מוצר חדש. על כן, הפרופורציה של תאריכי חסימה ביחס לאורך חיי האופציה יכולה להגיע בין 35% ל- 65% לשנה. במקרים שכאלה, תקופות חסימה ישפיעו באופן משמעותי על ערך האופציה. לדוגמא, תמונה 16 מציגה את השינויים בין מודל הרשת הבינומי המותאם אישית עם ובלי תקופות חסימה. ניתן לראות כי באמצעות הוספת אלמנטים מציאותיים של תקופות חסימה, הערך של אופציות לעובדים יכול לרדת בין 10% ל- 35%, בהסתמך על שיעור החילוט והתנודתיות. כצפוי, הירידה בערך האופציה היא ליניארית, כאשר השפעותיהן של תקופות חסימה ישתנו כפונקציה של משתני קלט אחרים הקשורים בניתוח.

[25] מחיר מניה ומחיר מימוש של $100, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 75%, אין דיבידנד, תקופת הבשלה של שנה, שיעור חילוט 10% ו- 1,000 איטרציות במודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לשיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות משמעותיות ביחס לשינויים ב- (i) תנודתיות וב- (ii) שיעור החילוט:

שיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות משמעותיות

התנודתיות (Volatility)

25.0%	30.0%	35.0%	40.0%	45.0%	50.0%	שיעור החילוט (Forfeiture Rate)
-34.77%	-27.78%	-22.11%	-19.51%	-15.78%	-13.50%	14.0%
-33.32%	-26.48%	-21.00%	-18.53%	-14.93%	-12.44%	13.0%
-31.78%	-25.11%	-19.84%	-17.51%	-14.05%	-11.70%	12.0%
-30.12%	-23.67%	-18.64%	-16.45%	-13.15%	-10.94%	11.0%
-28.34%	-22.15%	-17.38%	-15.35%	-12.22%	-10.17%	10.0%
-26.44%	-20.54%	-16.07%	-14.21%	-11.26%	-9.37%	9.0%
-24.40%	-18.84%	-14.71%	-13.03%	-10.27%	-8.55%	8.0%
-22.20%	-17.06%	-13.29%	-11.80%	-9.25%	-7.70%	7.0%
-19.85%	-15.17%	-11.80%	-10.53%	-8.20%	-6.84%	6.0%
-17.33%	-13.18%	-10.26%	-9.21%	-7.11%	-5.95%	5.0%

תמונה 16 – ההשפעות של תקופות חסימה משמעותיות (שיעורי חילוט וסטיות תקן שונים)[26]

תמונה 17 מראה את השפעתן של חסימות תחת תשואות דיבידנד ותקופות הבשלה שונות, בשעה שתמונה 18 מראה את התוצאות העולות מתשואות דיבידנד ומכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית שונים. בבירור, זה כמעט בלתי אפשרי לחזות את ההשפעה המדייקת ללא ביצוע ניתוח מדויק, אולם ניתן להכליל ולומר שהטווח הטיפוסי הוא בין 10% ל- 20%. תקופות חסימה ניתנות למידול במודל הרשת הבינומי בלבד ולא במודל Black & Scholes הרגיל/הכללי.

[26] מחיר מניה ומחיר מימוש בטווח של $30-$100, משך חיים של 10 שנים, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, תנודתיות 45%, תשואות דיבידנד בטווח של 0%-10%, תקופת הבשלה של 1-4 שנים, שיעור חילוט 5%-14%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית של 1.8-3.0 ו- 1,000 איטרציות במודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לשיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות משמעותיות ביחס לשינויים ב- (i) תקופת ההבשלה וב- (ii) תשואת הדיבידנד:

שיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות

תקופת ההבשלה (Vesting)

1	2	3	4		
-13.22%	-10.81%	-9.01%	-7.64%	10.0%	
-12.71%	-10.40%	-8.65%	-7.31%	9.0%	
-12.22%	-9.99%	-8.29%	-6.99%	8.0%	
-11.74%	-9.58%	-7.93%	-6.67%	7.0%	
-11.26%	-9.18%	-7.58%	-6.35%	6.0%	תשואת הדיבידנד (Dividends)
-10.80%	-8.79%	-7.24%	-6.04%	5.0%	
-10.34%	-8.41%	-6.90%	-5.73%	4.0%	
-9.90%	-8.03%	-6.56%	-5.43%	3.0%	
-9.46%	-7.66%	-6.24%	-5.13%	2.0%	
-9.04%	-7.29%	-5.91%	-4.84%	1.0%	
-8.52%	-6.93%	-5.59%	-4.45%	0.0%	

תמונה 17 – ההשפעות של תקופות חסימה משמעותיות (תשואות דיבידנד ותקופות הבשלה שונות)

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לשיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות משמעותיות ביחס לשינויים ב- (i) תשואת הדיבידנד וב- (ii) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית:

שיעור השינוי בין ערך האופציה ללא תקופות חסימה לבין ערך האופציה עם חסימות משמעותיות

תשואת הדיבידנד (Dividends)

0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	6.0%	7.0%	8.0%	9.0%	10.0%		
-8.62%	-9.04%	-9.46%	-10.34%	-9.90%	-10.80%	-11.26%	-11.74%	-12.22%	-12.71%	-13.22%	3.0	
-8.62%	-9.04%	-9.46%	-10.34%	-9.90%	-10.80%	-11.26%	-11.74%	-12.22%	-12.71%	-13.22%	2.9	
-6.34%	-6.80%	-7.28%	-7.77%	-8.26%	-8.76%	-9.27%	-9.79%	-10.32%	-10.86%	-11.41%	2.8	
-6.34%	-6.80%	-7.28%	-7.77%	-8.26%	-8.76%	-9.27%	-9.79%	-10.32%	-10.86%	-11.41%	2.7	
-6.34%	-6.80%	-7.28%	-7.77%	-8.26%	-8.76%	-9.27%	-9.79%	-10.32%	-10.86%	-11.41%	2.6	מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית Suboptimal) Exercise Behavior (Multiple
-6.34%	-6.80%	-7.28%	-7.77%	-8.26%	-8.76%	-9.27%	-9.79%	-10.32%	-10.86%	-11.41%	2.5	
-4.71%	-5.05%	-5.39%	-5.74%	-6.10%	-6.46%	-6.82%	-7.19%	-7.57%	-7.95%	-8.34%	2.4	
-4.71%	-5.05%	-5.39%	-5.74%	-6.10%	-6.46%	-6.82%	-7.19%	-7.57%	-7.95%	-8.34%	2.3	
-4.71%	-5.05%	-5.39%	-5.74%	-6.10%	-6.46%	-6.82%	-7.19%	-7.57%	-7.95%	-8.34%	2.2	
-1.87%	-2.29%	-2.72%	-3.15%	-3.59%	-4.04%	-4.50%	-4.96%	-5.42%	-5.90%	-6.38%	2.1	
-1.87%	-2.29%	-2.72%	-3.15%	-3.59%	-4.04%	-4.50%	-4.96%	-5.42%	-5.90%	-6.38%	2.0	
-1.01%	-1.29%	-1.58%	-1.87%	-2.16%	-2.45%	-2.75%	-3.06%	-3.36%	-3.67%	-3.98%	1.9	
-1.01%	-1.29%	-1.58%	-1.87%	-2.16%	-2.45%	-2.75%	-3.06%	-3.36%	-3.67%	-3.98%	1.8	

תמונה 18 – ההשפעות של תקופות חסימה משמעותיות (תשואות דיבידנד ומכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית שונים)

15. סוגיות אי סחירות

תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R לא דן במפורש בסוגיית אי הסחירות. קרי, אופציות לעובדים אינן ניתנות להעברה ישירות למישהו אחר ואינן ניתנות למסחר בשוק הפתוח. תחת נסיבות שכאלה ניתן לטעון, בהתבסס הן על תיאוריה כלכלית והן על פרקטיקה מימונית, כי יש ליישם ניכיון בגין היעדר סחירות ונזילות כליל (DLOM- Discount for Lack Of Marketability) על אופציות לעובדים.

אפליקציה פשוטה וישירה של הדיסקאונט על תוצאות מודל הרשת הבינומי אסור שתתבסס על אחוז "תספורת" (Haircut) הנבחר שרירותית. לחילופין, יש לבצע ניתוח מחמיר וקפדני באמצעות אופציית Put. אופציית Call היא הזכות החוזית, אך לא החובה, לרכישת מניית הבסיס במחיר מימוש חוזי הנקבע מראש במשך זמן מוגדר, בשעה שאופציית Put היא הזכות החוזית, אך לא החובה, למכירת מניית הבסיס במחיר מימוש חוזי הנקבע מראש במשך זמן מוגדר. על כן, אם מחזיק אופציה לעובדים אינו יכול למכור או להעביר את הזכויות על האופציה למישהו אחר, הרי שמחזיק האופציה ויתר על הזכויות לאופציית Put (משמע, שהעובד כתב או מכר אופציית Put על החברה). חישוב אופציית ה- Put וניכוי ערכה מאופציית ה- Call מספק דיסקאונט מוצדק ונכון תיאורטית בגין אי הסחירות (nonmarketability) ואי עבירות (nontransferability) של האופציה הקיימת.

אם זאת, יש לשים לב בניתוח ה"תספורת" או מרכיב הדיסקאונט. נציין כי לצרכי חישוב אופציית ה- Put במודל הרשת הבינומי המותאם אישית יש להשתמש באותם נתוני הקלט המוזנים לתוך מודל הרשת הבינומי המותאם אישית לחישוב אופציית Call. דהיינו, אופציית ה- Put חייבת להיות תחת אותם הסיכונים (תנודתיות המשתנה עם הזמן), הסביבה הכלכלית (מבנה שערי הריבית המשתנה לאורך זמן), המדיניות הפיננסית של התאגיד (תשואת דיבידנד המשתנה לאורך חיי האופציה) , ההתחייבויות החוזיות (תקופת הבשלה, משך חיים, מחיר מימוש ותאריכי חסימה), האי רציונאליות של המשקיעים (התנהגות מימוש לא אופטימאלית), ביצועי החברה (מחיר המניה במועד ההענקה) וכו'.

למרות שתקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R אינו דן במפורש בתספורות או בניכיונות בגין אי סחירות, ביצענו בכל מקרה ניתוח להערכת השווי, לצורך השלמה עם הכתוב לעיל. על כל הנהלת חברה להחליט בעצמה אם לבצע ניכיון או לאו. תמונה 19 למטה מראה את תוצאות הערכת השווי של אופציה לעובדים טיפוסית[27] באמצעות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

[27] פירוט ההנחות: מחיר מניה ומחיר מימוש של $100, משך חיים של 10 שנים, תקופת הבשלה של שנה , תנודתיות 35%, תשואת דיבידנד 0%, שיעור ריבית חסרת סיכון 5%, מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית בטווח של 1.2 עד 3.0, שיעורי חילוט בטווח של 0%-40% ו- 1,000 איטרציות במודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

תמונה 20 מראה את תוצאות ניתוח האי סחירות שבוצע באמצעות אופציית Put עם חסם עליון (upper barrier) מסוג down-and-in מתוקננת עם אותם נתוני קלט (תקופת הבשלה, חסימות, חילוטים, התנהגות מימוש לא אופטימאלית וכו') שחושבה בעזרת באמצעות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית.[28] טווחי הדיסקאונט נעים בין

22% ל- 53%. הדיסקאונט המחושב נראה משמעותי במקצת אך למעשה הוא מתיישב עם ציפיות השוק.[29] מאחר וה- FASB לא מעודד שימוש בשיעורי הדיסקאונט הללו, המחבר נזהר בשימוש בהם בקביעת השווי ההוגן של אופציות לעובדים.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לערך האופציה על בסיס מודל הרשת הבינומי המותאם אישית ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימית וב- (ii) שיעור החילוט:

ערך האופציה על בסיס מודל הרשת הבינומי המותאם אישית

מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית (Suboptimal Exercise Behavior Multiple)

1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0		
$14.13	$15.89	$17.24	$18.00	$18.58	$19.01	$19.33	$19.49	$19.63	$19.73	40.0%	
$15.04	$17.04	$18.61	$19.51	$20.20	$20.73	$21.12	$21.31	$21.49	$21.62	35.0%	
$16.02	$18.31	$20.14	$21.21	$22.06	$22.70	$23.19	$23.44	$23.65	$23.82	30.0%	
$17.10	$19.73	$21.89	$23.17	$24.20	$25.00	$25.61	$25.93	$26.19	$26.41	25.0%	שיעור החילוט
$18.28	$21.32	$23.88	$25.44	$26.71	$27.70	$28.48	$28.89	$29.23	$29.52	20.0%	(Forfeiture
$19.58	$23.13	$26.20	$28.11	$29.69	$30.94	$31.93	$32.46	$32.91	$33.29	15.0%	Rate)
$21.04	$25.22	$28.93	$31.29	$33.27	$34.88	$36.16	$36.86	$37.45	$37.94	10.0%	
$22.69	$27.65	$32.19	$35.15	$37.67	$39.74	$41.42	$42.34	$43.13	$43.80	5.0%	
$24.57	$30.53	$36.16	$39.90	$43.15	$45.87	$48.09	$49.33	$50.40	$51.31	0.0%	

תמונה 19 – תוצאות הערכת השווי באמצעות המודל הבינומי המותאם אישית

[28] שיטה חלופית היא לחשב את תיקון עלויות הנשיאה (carrying cost) הרלוונטי ע"י החדרה מלאכותית של תשואת דיבידנד מנופחת על מנת להפוך את האופציה לעובדים ל"אופציה רכה", ובשל כך להביא לניכיון ערך האופציה לעובדים. שיטה זו הרבה יותר קשה ליישום ורגישה יותר לחד צדדיות מאשר שימוש באופציית Put.

[29] Cedric Jolidon מוצא שתוחלת ערכי הדיסקאונט בגין אי סחירות נע בין 20% ל- 35% במאמרו, "The Applications of the Marketability Discount in the Valuation of Swiss Companies", (*Swiss Private Equity Corporate Finance Association*). טווח סחירות טיפוסי של 10%-40% נמצא בכמה תיקי דיסקאונט שנידונו בבתי משפט. ב- *CPA Journal* (פברואר 2001), Greene ו- Schnapp מצאו שהטווח הטיפוסי הוא 30%-35%. מאמר נוסף ב- *Business Valuation Review* מוצא ש- 35% הוא הערך הטיפוסי ("Jay Abrams, "Discount for Lack of Marketability"). ב- *Fair Value newsletter*, מוצא Michael Paschall ש- 30%-50% הוא הדיסקאונט בגין אי סחירות המקובל בשוק.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", ל"תספורת" (Haircut) - ערך אופציית Put מתוקננת על בסיס מודל הרשת הבינומי המותאם אישית) ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וב- (ii) שיעור החילוט:

ה"תספורת" (Haircut) - ערך אופציית Put מתוקננת על בסיס מודל הרשת הבינומי המותאם אישית

מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית (Suboptimal Exercise Behavior Multiple)

1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	שיעור החילוט (Forfeiture Rate)
$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	$7.52	40.0%
$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	$7.92	35.0%
$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	$8.34	30.0%
$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	$9.77	25.0%
$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	$9.23	20.0%
$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	$9.72	15.0%
$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	$10.23	10.0%
$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	$10.76	5.0%
$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	$11.33	0.0%

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות דו פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לניכיון בגין אי סחירות ואי עבירות כליל ביחס לשינויים ב- (i) מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית וב- (ii) שיעור החילוט:

ניכיון בגין אי סחירות ואי עבירות כליל (%)

מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית (Suboptimal Exercise Behavior Multiple)

1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	שיעור החילוט (Forfeiture Rate)
53.24%	47.34%	43.64%	41.80%	40.49%	39.57%	38.92%	38.60%	38.34%	38.14%	40.0%
52.67%	46.48%	42.56%	40.60%	39.20%	38.21%	37..50%	37.15%	36.86%	36.63%	35.0%
52.03%	45.53%	41.38%	39.29%	37.79%	36.72%	35.95%	35.56%	35.25%	35.00%	30.0%
51.32%	44.48%	40.09%	37.86%	36.25%	35.10%	34.26%	33.84%	33.49%	32.22%	25.0%
50.52%	43.31%	38.66%	36.29%	34.57%	33.33%	32.42%	31.96%	31.59%	31.28%	20.0%
49.62%	42.01%	37.08%	34.57%	32.73%	31.40%	30.43%	29.93%	29.53%	29.19%	15.0%
48.60%	40.55%	35.35%	32.68%	30.73%	29.32%	28.28%	27.75%	27.31%	26.95%	10.0%
47.43%	38.92%	33.43%	30.62%	28.57%	27.08%	25.98%	25.42%	24.95%	24.57%	5.0%
46.09%	37.09%	31.32%	28.39%	26.25%	24.69%	23.55%	22.96%	22.47%	22.07%	0.0%

תמונה 20 – ניכיון בגין אי סחירות ואי עבירות כליל

16. ניתוח משך החיים הצפוי

כפי שהוצג מקודם, תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R[30] אוסר באופן מפורש שימוש במודל Black & Scholes מתוקנן עם משך חיים צפוי בודד. משמע, שבמקום להשתמש במשך החיים של האופציה כנתון קלט במודל Black & Scholes על מנת לקבל תוצאה דומה במודל הרשת הבינומי המותאם אישית, הרי שהניתוח צריך להיות בכיוון ההפוך. קרי, להשתמש בדרישות הבשלה, מכפילי התנהגות מימוש מוקדם לא אופטימאלית, שיעורי חילוט או עזיבת עובדים ושאר נתוני הקלט הסטנדרטיים עבור אופציה, לחישוב תוצאות הערכת השווי באמצעות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית. ניתן להשוות תוצאה זו למודל Black & Scholes המתוקנן ומשך החיים הצפוי מחולץ ממנו. ניתן להשתמש בפונקצית "חתירה למטרה" ב- Excel כדי לחלץ את משך החיים הצפוי של האופציה ע"י קביעת תוצאת מודל Black & Scholes כשווה לתוצאת מודל הרשת הבינומי המותאם אישית. ואז ניתן להשוות את תוצאת משך החיים הצפוי עם נתונים היסטוריים כאימות משני לתוצאות, למשל, אם משך החיים הצפוי נופל בתוך גבולות סבירים המבוססים על ביצועים היסטוריים. זוהי הגישה הנכונה מאחר ומדידת משך החיים הצפוי של אופציה היא דבר מאוד קשה ולא מדוייק.

תמונה 21 מראה את השימוש בפונקצית "חתירה למטרה" ב- Excel בתוכנה להערכת שווי אופציות לעובדים לחילוץ משך החיים הצפוי מתוך מודל Black & Scholes ע"י קביעת תוצאות מודל Black & Scholes כשוות לתוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות חד פרמטרי, במתודת חישוב "What if", למשך החיים הצפוי ביחס לשינויים במכפיל התנהגות מימוש לא אופטימית:

תוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית לחילוץ משך החיים הצפוי ממודל Black & Scholes

יישום מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימלית שונים

מחיר מניה	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00
ממחיר מימוש	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00
משך חיים חוזי	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
שיעור ריבית חסרת הסיכון	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%
תשואת דיבידנד	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
תנודתיות	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
תקופת הבשלה	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	**1.10**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**	**3.50**	**4.00**
שיעור חילוט	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
איטרציות	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
מודל בינומי	$8.94	$10.28	$11.03	$11.62	$11.89	$12.18	$12.29
מודל Black & Scholes	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87
משך חיים צפוי	**4.42**	**5.94**	**6.95**	**7.83**	**8.26**	**8.74**	**8.93**
מודל Black & Scholes מתוקנן	$8.94	$10.28	$11.03	$11.62	$11.89	$12.18	$12.29

תמונה 21 – חילוץ משך החיים הצפוי מתוך מודל Black & Scholes באמצעות תוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית

[30] SFAS**123**R, Sections A15 and B64.

תמונה 22 מתארת מקרה אחר, כאשר ניתן לחלץ את משך החיים הצפוי, אך הפעם שיעורי החילוט אינם נקבעים על אפס. במקרה הזה, יש לתקן את תוצאות מודל Black & Scholes. לדוגמא, תוצאת מודל הרשת הבינומי המותאם אישית של $5.41 מתקבלת עם שיעור חילוט של 15%. קרי תוצאת מודל Black & Scholes צריכה להיות $BSM \cdot (1-15\%) = \$5.41$ באמצעות שיטת משך החיים הצפוי המתוקנן. משך החיים הצפוי המביא לתוצאת מודל Black & Schools של $6.36 ($\$5.41/85\% = \$6.36$ $ ו- $6.36\$ \cdot (1-15\%) = \$5.41$) הוא 2.22 שנים.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות חד פרמטרי, במתודת חישוב "What if", למשך החיים הצפוי ביחס לשינויים בשיעור החילוט:

תוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית לחילוץ משך החיים הצפוי ממודל Black & Scholes

יישום שיעורי חילוט שונים

מחיר מניה	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00
מחיר מימוש	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00	$20.00
משך חיים חוזי	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
שיעור ריבית חסרת הסיכון	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%
תשואת דיבידנד	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
תנודתיות	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
תקופת הבשלה	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
שיעור חילוט	**0.00%**	**2.50%**	**5.00%**	**7.50%**	**10.00%**	**12.50%**	**15.00%**
איטרציות	1000						
מודל בינומי	$10.28	$9.23	$8.29	$7.44	$6.69	$6.02	$5.41
מודל Black & Scholes	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87	$12.87
משך חיים צפוי	**5.94**	**4.71**	**3.77**	**3.03**	**2.45**	**1.99**	**1.61**
מודל Black & Scholes מתוקנן*	$10.28	$9.23	$8.29	$7.44	$6.69	$6.02	$5.41
משך חיים צפוי	**5.94**	**4.97**	**4.19**	**3.55**	**3.02**	**2.59**	**2.22**
מודל Black & Scholes מתוקנן**	$10.28	$9.23	$8.29	$7.44	$6.69	$6.02	$5.41

* משתמש בתוצאת מודל הרשת הבינומי לחילוץ משך החיים הצפוי ממודל Black & Scholes מתוקנן

**משתמש בתוצאת מודל הרשת הבינומי אך גם לוקח בחשבון את שיעור החילוט על מנת לתקן את מודל Black & Scholes

תמונה 22 – חילוץ משך החיים הצפוי מתוך מודל Black & Schools באמצעות תוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית תחת שיעורי חילוט השונים מאפס

17. דילול

ברוב המקרים, ניתן בבטחה להתעלם מהשפעות הדילול מאחר והשיעור של אופציות לעובדים מוענקות נמוך יחסית לסך ההון העצמי המונפק של החברה. ע"פ תיאוריית מימון השקעות, השוק כבר צפה את מימוש האופציות לעובדים וההשפעות כבר נלקחו בחשבון במחיר המניה. ברגע שמודיעים על הענקה חדשה, מחיר המניה מייד ובאופן מלא יגלם את המידע הנ"ל וייקח בחשבון כל דילול אשר יכול להתרחש. הווה אומר, כל עוד הערכת השווי מבוצעת לאחר שההודעה כבר יצאה, הארי שהשפעות הדילול אינן קיימות. תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R לא מספק הנחיה מפורשת בנושא זה. בהינתן שה- FASB מספק הנחיה מעטה לגבי דילול[31], ומאחר וחיזוי מחירי המניה (כחלק מאמידת השפעות הדילול) קשה למדי ובלתי מדויק לחלוטין במקרה הטוב, בנוסף לעובדה שהשפעות הדילול הן מינימאליות (קטנות בהשוואה לכל ההון המונפק של החברה), הרי שניתן להניח כי השפעות הדילול הן מינימאליות ועל כן ניתן להתעלם מהן בבטחה.

[31] SFAS**123**R, Sections A39.

18. יישום סימולציית Monte Carlo

ניתן ליישם סימולציית Monte Carlo על מנת לקבל טווח של שווי הוגן לאופציה מחושבת. קרי, ניתן לבחור עבור סימולציית Monte Carlo בכל נתוני הפלט המשמשים להערכת שווי אופציות לעובדים, בתנאי שהם לא וודאיים וסטוכסטיים. יש לייחס למשתנים הללו הנחות התפלגות וערכי האופציה המתקבלים כתוצאה משימוש במודל Black & Scholes, מודל Black & Scholes הכללי, סימולציית מסלול, או מודל רשת בינומי נבחרים כתאי חיזוי (forecast cells). אי הוודאויות הממודלות המתוארות לעיל, כוללות הן את ההסתברות לחילוט והן את התנהגות המימוש הלא אופטימאלית של העובדים.

תוצאות הסימולציה במהותן הן התפלגות של ערכי האופציה. יש לזכור שאפליקציית הסימולציה משמשת כאן לשינוי או אם תרצו לגיוון נתוני הקלט במודל הערכת שווי אופציות על מנת לקבל טווח של תוצאות, אך בשום פנים ואופן לא למידול וחישוב האופציות עצמן. למרות זאת, ניתן ליישם סימולציית Monte Carlo הן ליצירת סימולציות לנתוני הקלט במטרה לקבל טווח עבור תוצאות האופציות והן על מנת לפתור את מודל האופציות תוך שימוש בסימולציה תלוית מסלול (path-dependent).

סימולציית Monte Carlo, הנקראת על שם בירת ההימורים המפורסמת של מונקו, היא מתודולוגיה מאוד חזקה. סימולציית Monte Carlo יוצרת עתיד מלאכותי ע"י יצירת אלפי ואפילו מיליוני מסלולי מדגם (sample path) עבור התוצאות ובוחנת את המאפיינים המקובלים שלהן, והצורה הפשוטה ביותר שלה היא מחולל מספר אקראי (random number generator) המשמש לחיזוי, אמידה וניתוח סיכונים. סימולציה מחשבת מספר רב של תרחישים (scenarios) עבור המודל ע"י בחירה שוב ושוב של ערכים, מתוך ממשק המוגדר מראש כהתפלגות נורמאלית, עבור המשתנים הלא וודאיים ושימוש בערכים הללו עבור המודל. כאשר כל התרחישים הללו מפיקים תוצאות הקשורות למודל, לכל תרחיש קיימת תחזית. תחזיות הן אירועים (בדרך כלל עם נוסחאות או פונקציות) שאנו מגדירים כתוצאות חשובות של המודל.

באופן פשטני, ניתן לחשוב על גישת סימולציית Monte Carlo כעל בחירת כדורי גולף מתוך סל גדול, שוב ושוב עם החזרות, כפי שנראה בדוגמה הבאה. כמובן שגודל וצורתו של הסל תלויים בהנחות התפלגות (למשל, התפלגות נורמאלית עם תוחלת של 100 וסטיית תקן של 10, מול התפלגות אחידה או התפלגות משולשת) כאשר כמה סלים הם עמוקים יותר וסימטריים יותר משאר הסלים, מה שמאפשר לכדורים מסוימים להימשך החוצה בתדירות גבוהה יותר מהשאר. מספר הכדורים הנמשכים שוב ושוב תלוי במספר האיטרציות (trials). עבור מודל גדול עם הנחות רבות, ניתן לדמיין את המודל הגדול כסל מאוד גדול, שבתוכו שוכנים הרבה סלים קטנטנים. כאשר לכל סל קטנטן יש סט של כדורי גולף המקפצים סביב. לפעמים הסלים הקטנטנים הללו קשורים אחד לשני (אם קיים מתאם בין המשתנים) וכדורי הגולף מקפצים בזה אחר זה בשעה שכדורי גולף אחרים מקפצים באופן עצמאי ולא תלויים זה בזה. הכדורים נבחרים בכל פעם מהאינטראקציות הללו בתוך המודל (האמא של כל הסלים), מאורגנים בצורת טבלה ונשמרים, מספקים תוצאת תחזית של הסימולציה. כמובן שהכדורים צבועים בצורה שונה לצורך זיהוי והצגת התדירות שלהם.

הרעיונות הללו ניתנות ליישום עבור הערכת שווי אופציות לעובדים. לדוגמא, הנחות הקלט הנדגמות הן נתוני הקלט הלא וודאיים ביותר ושיכולים להשתנות בעתיד, כמו מחיר המניה במועד ההענקה, התנודתיות, שיעורי החילוט, ומכפילי התנהגות המימוש הלא אופטימלית. לעומת זאת, אין לדגום משתנים המתקבלים באופן אובייקטיבי, כמו שערי ריבית (למשל שיעורי התשואות לפדיון של אגרות חוב של מדינת ישראל עם משך חיים ממוצע מתאים מתפרסמים), תשואת הדיבידנד (הנקבעת מאסטרטגיית החברה), תקופת ההבשלה, מחיר המימוש, תקופות חסימה (נקבעים באופן חוזי בהענקת האופציה). בנוסף, הנחות הקלט יכול שיהיו מתואמות. לדוגמא, שיעורי החילוט יכול שיהיו מתואמות שלילית עם מחיר המניה – אם הפירמה מציגה רווחים, על פי רוב מחיר המניה שלה עולה, מה שהופך את האופציה לבעלת ערך רב יותר ומה שמביא לכך שפחות סביר שהעובדים יעזבו מרצון ופחות סביר שהחברה תפטר אותם. לבסוף, פלטי התחזיות הם תוצאות הערכת שווי האופציה.

תוצאות הניתוח יתפלגו לאלפי תוצאות הערכת שווי עבורה האופציה, כאשר לכל נתוני הקלט הלא וודאיים מותר להשתנות בהתאם להנחות ההתפלגות והמתאמים שלהם, ומודל הרשת הבינומי המותאם אישית יטפל באינטראקציות שלהם. ניתן להשתמש בממוצע (אם ההתפלגות סימטרית) או בחציון (אם ההתפלגות א-סימטרית או בעלת נטייה לצד מסוים, כאשר זנב ההתפלגות מתרחב כלפי צד כלשהו, מכונה Skewed) של ערך האופציה המתקבל. לכן, במקום להשתמש באומדים נקודתיים בודדים לנתוני הקלט על מנת לקבל אומד נקודתי בודד לערך האופציה, ניתן להביא בחשבון את כל ההתניות האפשריות, התרחישים האפשריים, והאפשרויות במשתני הקלט באמצעות ניתוח המשתמש בסימולציית Monte Carlo. למעשה, תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R[32] מתיר וממליץ על שימוש בסימולציית Monte Carlo.

תמונה 23 מציגה את התוצאות המתקבלות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית המבוסס על נתוני קלט נקודתיים בודדים של כל המשתנים. המודל לוקח בחשבון נתוני קלט אקזוטיים כמו תקופת הבשלה, שיעורי חילוט, מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית, תקופות חסימה ונתוני קלט המשתנים (תשואות דיבידנד, שערי ריבית וסטיות תקן) לאורך זמן. תוצאת ערך האופציה המתקבלת היא 31.42$. ניתן להרחיב את הניתוח כך שיכלול סימולציה. תמונה 24 מציגה את השימוש בסימולציה בצמוד למודל הרשת הבינומי המותאם אישית.

[32] SFAS**123**R, Sections B64, B65 and footnotes 48, 52, 74 and 97.

שיעור ריבית חסרת סיכון		**תנודתיות**		**תשואת דיבידנד**		**מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית**	
שנה	שיעור	שנה	שיעור	שנה	שיעור	שנה	
1	3.50%	1	35.00%	1	1.00%	1	1.8
2	3.75%	2	35.00%	2	1.00%	2	1.8
3	4.00%	3	35.00%	3	1.00%	3	1.8
4	4.15%	4	45.00%	4	1.50%	4	1.8
5	4.20%	5	45.00%	5	1.50%	5	1.8

		שיעור חילוט		**תקופות חסימה**	
		שנה	שיעור	איטרציה	חודש
מחיר מניה	$100	1	5.00%	12	12
מחיר מימוש	$100	2	5.00%	24	24
משך חיים	5	3	5.00%	36	36
תקופת הבשלה	1	4	5.00%	48	48
איטרציות	60	5	5.00%	60	60

תמונה 23 – תוצאה נקודתית בודדת באמצעות שימוש במודל הרשת הבינומי המותאם אישית

במקום להחליט באופן אקראי על המספר ההרצות המדויק בסימולציה, נקבעו רמת ביטחון סטטיסטית ובקרת דיוק להרצת מספר ההרצות הדרוש באופן אוטומטי. רמת ביטחון של 99.9% לבקרת דיוק שגיאה של $0.01 נבחרו ועל כן הרצנו 145,510 איטרציות.[33] המשמעות של סט הפרמטרים המצומצם ביותר היא שעל מנת להבטיח שהתוצאות יפלו בתוך שגיאה ברת-השתנות של $0.01 ב- 99.9% מהזמן. לדוגמא, תוצאת הממוצע הנדגם היה $31.32 (תמונה 24). דהיינו, 999 פעמים מתוך 1,000 פעם שערך האופציה האמיתי יהיה מדויק עם סטייה של $0.01 הוא $31.32. המדדים הללו אובייקטיבים ותקפים סטטיסטית.[34]

[33]ניתן לבחור כל רמת דיוק וביטחון. כאן, רמת הביטחון הסטטיסטי היא 99.9% ודיוק השגיאה (תנודות של $0.01 סביב ממוצע ערך האופציה) די מגביל. כמובן, שרמת הדיוק המושגת מותנית בכך שהמשתנים והנחות ההתפלגות שלהם נכונות.

[34]קרי, מניח שנתוני הקלט תקפים ומדויקים.

Edit Preferences View Run Help

Cell G16 **Statistics**

Statistic	Value	Precision
Trials	145,510	
Mean	$31.32	$0.01
Median	$31.43	$0.02
Mode	---	
Standard Deviation	$1.57	$0.01
Variance	$2.46	
Skewness	-0.21	
Kurtosis	2.43	
Coeff. of Variability	0.05	
Range Minimum	$26.59	
Range Maximum	$35.62	
Range Width	$9.03	
Mean Std. Error	$0.00	

* Statistics shown in color are tested for $0.01 precision at 99.90% confidence

תמונה 24 – תוצאת הערכת שווי אופציות עם דיוק של $0.01 ורמת ביטחון של 99.9%

19. דוגמא להערכת שווי

הערכת השווי לדוגמא מתחילה בבחירה והצדקה של כל אחד מהפרמטרים במודל הרשת הבינומי המותאם אישית ומסתיימת בהצגת התוצאות שנוצרו בניתוח. חלק מהאספקטים היותר אינטנסיביים מבחינה אנליטית אך שווים בחשיבותם הושמטו לצרכי תמציתיות. הערכת השווי מבוססת על כמה הערכות שווי כלכלי של כתבי אופציות לעובדים שבוצעו ע״י המחבר, אך הערכים שלהן שונו על מנת לשמור על חיסיון. אף על פי כן, מהות הערכת השווי נשארה.

מחיר המניה ומחיר המימוש

שני נתוני הקלט הראשונים במודל הרשת הבינומי המותאם אישית הם מחיר המניה ומחיר המימוש. עבור האופציות לעובדים המונפקות, מחיר המימוש נקבע תמיד כמחיר המניה במועד ההענקה כך שהאופציות לעובדים מוענקות ״בכסף״. דהיינו, השגת מחיר המניה תביא לקבלת מחיר המימוש. תמונה 25 למטה סופקה על ידי מחלקת קשרי משקיעים של החברה. מחירי סגירה שמרניים ואגרסיביים של מחיר המניה סופקו עבור תקופה של 24 חודשים, שנוצרו באמצעות שימוש באמידת עקום צמיחה. לדוגמא, מחיר הסגירה של המניה עבור דצמבר 2004 נאמד בין $45.17 ל- $50.70. במטרה לבצע Due diligence לתחזית מחיר המניה במועד ההענקה, השתמשנו בכמה גישות אחרות. השגנו 12 תחזיות של אנליסטים לגבי מחיר מניית החברה ועשינו ממוצע לתוצאות שלהם. בנוסף, השתמשנו במידול אקונומטרי עם סימולציית Monte Carlo לחיזוי מחיר המניה. בעזרת מודל סימולציית Brownian Motion סטוכסטי (תמונה 26), חזינו את מחיר המניה הממוצע כ- $47.22 (תמונה 27), בעקביות עם מחיר המניה ע״פ מחלקת קשרי משקיעים. ניתוח הערכת השווי ישתמש בכל שלושת מחירי המניה, והתוצאה הסופית תשתמש בממוצע של שלוש התחזיות למחירי המניה.

אומדן למחיר המניה ע"פ קשרי משקיעים

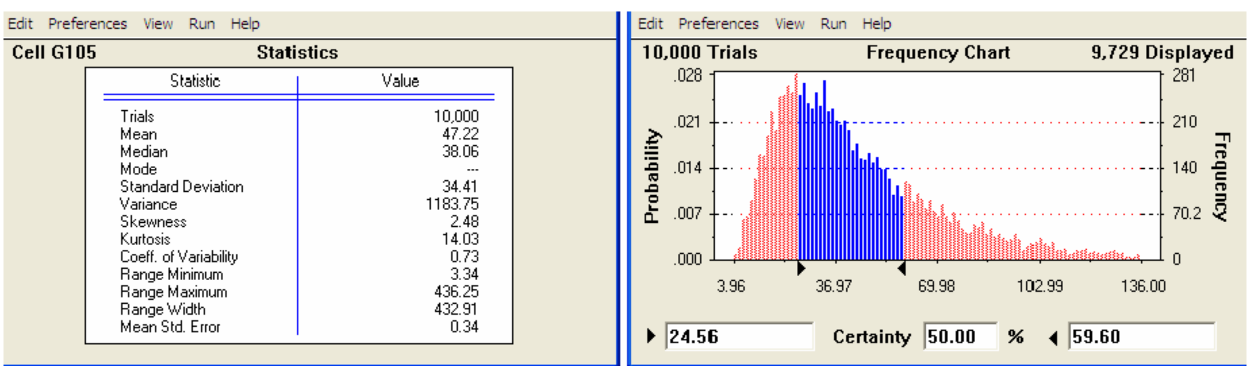
מועד ההענקה	שמרני	אגרסיבי	הערות
4 מרץ 04	$37.51	$37.51	בפועל
2 אפריל 04	$33.40	$33.40	בפועל
מאי-04	$34.87	$35.56	חושב
יוני-04	$36.34	$37.72	חושב
יולי-04	$37.81	$39.88	חושב
אוגוסט-04	$39.28	$42.05	חושב
ספטמבר-04	$40.75	$44.21	חושב
אוקטובר-04	$42.22	$46.37	חושב
נובמבר-04	$43.69	$48.53	חושב
דצמבר-04	$45.17	$50.70	ע"פ קשרי משקיעים
ינואר-05	$45.89	$51.52	חושב
פברואר-05	$46.61	$52.34	חושב
מרץ-05	$47.34	$53.16	חושב
אפריל-05	$48.78	$53.98	חושב
מאי-05	$49.51	$54.81	חושב
יוני-05	$50.23	$55.63	חושב
יולי-05	$50.95	$56.45	חושב
אוגוסט-05	$51.68	$57.27	חושב
ספטמבר-05	$52.30	$58.92	חושב
נובמבר-05	$53.13	$59.74	חושב
דצמבר-05	$58.35	$60.56	ע"פ קשרי משקיעים

תמונה 25 – תחזית מחיר המניה ע״פ קשרי לקוחות

תהליך "גאומטרי בראוני" (Geometric Brownian Motion) עם סחיפה

הנחות		זמן	ערך הנכס	סימולציה
ערך התחלתי	$31.95	0.0000	31.95	
סחיפה שנתית	60.00%	0.0067	27.64	-2.11
תנודתיות שנתית	88.44%	0.0133	28.82	0.59
אופק חזוי	0.67	0.0200	29.18	0.13
איטרציות	100.00	0.0267	30.56	0.66
גודל איטרציה	0.0067	0.0333	28.40	-1.14
		0.0400	30.14	0.87
		0.0467	31.72	0.74
		0.0533	32.87	0.49
		0.0600	34.16	0.54
		0.0667	37.27	1.33
		0.0733	38.10	0.28
		0.0800	36.11	-0.86
		0.0867	37.16	0.38
		0.0933	37.98	0.28
		0.1000	39.03	0.36
		0.1067	40.64	0.57
		0.1133	39.14	-0.62
		0.1200	39.40	0.04
		0.1267	40.12	0.22
		0.1333	39.67	-0.23
		0.1400	42.70	1.10
		0.1467	39.88	-1.07
		0.1533	39.64	-0.15

תמונה 26 – תחזית מחיר המניה באמצעות שימוש בטכניקות סימולציה תלוית מסלול (path-dependent) סטוכסטית



תמונה 27 – תוצאות תחזית מחיר המניה באמצעות שימוש בסימולציית Monte Carlo

משך חיים חוזי

נתון הקלט הבא הוא מועד הפקיעה של האופציה. משך החיים החוזי של הוא 10 שנים עבור כל אופציה מונפקת. זה עקבי לאורך כל תוכנית הרצאת האופציות לעובדים. לכן, נשתמש ב- 10 שנים כנתון קלט במודל הרשת הבינומי.

שערי ריבית

נתון הקלט הבא הוא שיעור הריבית חסרת הסיכון. הורדנו מכתובת האינטרנט www.ustreas.gov רשימה מפורטת של תשואות ספוט עבור אגרות חוב U.S. Treasury Securities Interest Rates (Continuously Compounded).

באמצעות עקום הספוט (Spot Curve), השתמשנו בשיטת ה- Bootstrapping להשגת עקום ריביות פורוורד שנתיות כפי שניתן לראות בתמונה 28. שערי ספוט הם שערי ריבית מזמן אפס ועד זמן כלשהו בעתיד. לדוגמא, שער ספוט לשנתיים הוא שער ריבית משנה אפס ועד שנה שתיים, בשעה ששער הספוט לחמש שנים הוא שער הריבית משנה אפס ועד שנה חמש, וכך הלאה. בכל אופן, אנו זקוקים לריביות הפורוורד עבור הערכת שווי האופציות, הניתנות להשגה ע״י חישוב ה- Bootstrapping לשערי הספוט. ריביות פורוורד (Forward Rates) הן שערי ריבית החלים בין שתי תקופות עתידיות. לדוגמא, ריבית פורוורד לשנה החל מבעוד שלוש שנים מעכשיו מתחילה למעשה בעוד שלוש שנים ומסתיימת בעוד ארבע שנים. בהתבסס על מועד הערכת השווי, שערי הריבית המודגשים למטה הם שערי הריבית שבהם השתמשנו במודל הרשת הבינומי (כלומר, 1.2%, 2.19%, 3.21%, 3.85% וכך הלאה).[35]

עקום ריביות פורוורד שנתיות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שנים
5.63%	5.31%	4.99%	5.27%	4.75%	4.84%	4.01%	3.43%	2.37%	1.29%	02/02/2004
5.58%	5.26%	4.94%	5.25%	4.72%	4.78%	3.95%	3.35%	2.29%	1.27%	03/02/2004
5.60%	5.28%	4.96%	5.24%	4.72%	4.83%	3.99%	3.37%	2.33%	1.27%	04/02/2004
5.65%	5.33%	5.01%	5.26%	4.75%	4.85%	4.03%	3.51%	2.41%	1.29%	05/02/2004
5.60%	5.27%	4.94%	5.17%	4.66%	4.80%	3.96%	3.34%	2.28%	1.26%	06/02/2004
5.57%	5.24%	4.91%	5.17%	4.65%	4.74%	3.91%	3.27%	2.27%	1.25%	09/02/2004
5.61%	5.28%	4.95%	5.18%	4.67%	4.75%	3.94%	3.36%	2.37%	1.27%	10/02/2004
5.53%	5.20%	4.87%	5.16%	4.63%	4.65%	3.84%	3.24%	2.23%	1.23%	11/02/2004
5.67%	5.32%	4.97%	5.12%	4.61%	4.71%	3.89%	3.29%	2.26%	1.24%	12/02/2004
5.59%	5.25%	4.91%	5.14%	4.61%	4.67%	3.84%	3.18%	2.19%	1.21%	13/02/2004
5.56%	5.25%	4.91%	5.11%	4.59%	4.68%	3.85%	3.21%	2.19%	1.21%	17/02/2004
5.56%	5.23%	4.89%	5.12%	4.60%	4.67%	3.85%	3.23%	2.21%	1.23%	18/02/2004
5.59%	5.25%	4.91%	5.11%	4.59%	4.68%	3.85%	3.21%	2.17%	1.23%	19/02/2004
5.64%	5.30%	4.96%	5.13%	4.62%	4.76%	3.92%	3.26%	2.24%	1.26%	20/02/2004
5.56%	5.23%	4.89%	5.12%	4.60%	4.69%	3.86%	3.26%	2.16%	1.22%	23/02/2004
5.58%	5.24%	4.90%	5.10%	4.58%	4.65%	3.83%	3.23%	2.15%	1.23%	24/02/2004
5.56%	5.22%	4.88%	5.11%	4.58%	4.64%	3.81%	3.15%	2.11%	1.23%	25/02/2004
5.59%	5.25%	4.91%	5.14%	4.61%	4.69%	3.85%	3.17%	2.15%	1.23%	26/02/2004
5.53%	5.19%	4.85%	4.90%	4.43%	4.79%	3.90%	3.08%	2.11%	1.21%	27/02/2004

תמונה 28 – תוצאות ריביות הפורוורד השנתיות משימוש בשיטת ה- Bootstrapping

[35] עקום הספוט המשמש בניתוח חושב כממוצע של 4 השבועות שקדמו למועד הערכת השווי על מנת לקבל קונצנזוס שוק טוב יותר עבור הציפיות הכלכליות.

תשואות דיבידנד

מניית החברה לא מחלקת דיבידנד, ועל כן הפרמטר הנ״ל ייקבע תמיד על אפס. במקרים אחרים, אם קיימות תשואות דיבידנד, הרי שתשואות הללו יוכנסו לתוך המודל, כולל כל שינוי במדיניות חלוקת הדיבידנד לאורך חיי האופציה.

תנודתיות

התנודתיות היא נתון הקלט הבא במודל הרשת הבינומי המותאם אישית. ישנם כמה דרכים למדידת התנודתיות, ולצורך גילוי נאות ו- Due diligence, נעשה שימוש בכל השיטות בהערכת השווי הנ״ל. תמונה 29 מציגה את השיטה הראשונה המשמשת לאמידת התנודתיות המשתנה של מחירי מניית החברה באמצעות מודל GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). נתוני הקלט במודל הם כל מחירי המניה ההיסטוריים הזמינים מאז הנפקתה בבורסה. התוצאה מצביעה על כך שמודל GARCH (1,1) הסטנדרטי לא מתאים לחיזוי תנודתיות המניה בשל R^2[36] נמוך וערכי F[37] נמוכים.

Dependent Variable: LOGRETURNS
Method: ML - ARCH
Date: 04/10/04 Time: 10:48
Sample: 1901 2603
Included observations: 703
Convergence achieved after 30 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	-4.360685	1.794356	-2.430222	0.0151
C	0.004958	0.002188	2.266192	0.0234
Variance Equation				
C	3.10E-07	2.12E-06	0.145964	0.8839
ARCH(1)	0.031233	0.005472	5.707787	0.0000
GARCH(1)	0.971900	0.004750	204.5979	0.0000

R-squared	0.010575	Mean dependent var	-0.001054
Adjusted R-squared	0.004905	S.D. dependent var	0.038647
S.E. of regression	0.038552	Akaike info criterion	-3.841624
Sum squared resid	1.037432	Schwarz criterion	-3.809224
Log likelihood	1355.331	F-statistic	1.865084
Durbin-Watson stat	2.125897	Prob(F-statistic)	0.114774

תמונה 29 – שימוש במודל GARCH לחיזוי התנודתיות[38]

[36] ה- R-squared (R^2), או מקדם ההחלטיות, הוא מדד לשגיאה הבוחן עד כמה ההשתנות של המשתנה התלוי יכולה להיות מוסברת ע״י ההשתנות במשתנה הבלתי תלוי עבור ניתוח רגרסיה, ונע בין 0 ל- 1.0. ככל שערכו של ה- R^2 גבוה יותר כך המודל מתאים יותר ומסביר טוב יותר את הנתונים. במקרה שלנו, ה- R^2 הוא 0.0105 (תמונה 29), משמע התאמה גרועה וכי המודל לא מובהק סטטיסטית וכי אין להסתמך על תוצאותיו.

[37] דוגמאות לסטטיסטים עבור טיב ההתאמה כוללים את ה- t הסטטיסטי ואת ה- F הסטטיסטי. הראשון משמש לבדיקה האם כל אחד מהשיפועים והחותכים שנאמדו הוא מובהק סטטיסטי, קרי, אם הוא מובהק סטטיסטית ושונה אפס (על כן מוודאים שאומדני החותך והשיפוע תקפים סטטיסטית). האחרון מיישם את אותו הרעיון אך סימולטנית בודק את משוואת הרגרסיה בכללותה כולל החותך והשיפועים. ה- F הסטטיסטי של 1.8650 וה- p-value המתאים של 0.1147 (תמונה 29) מצביעים על כך שמבחינה קולקטיבית המודל אינו מובהק סטטיסטית וכי אין לסמוך על תוצאותיו.

[38] זוהי רק דוגמא של מודל GARCH הבאה המשמשת לתיאור הניתוח.

שתי גישות נוספות משמשות לאמידת התנודתיות. הראשונה משתמשת במחירי מניה היסטוריים עבור הרבעון האחרון, השנה האחרונה, השנתיים האחרונות, וארבע השנים האחרות (שקול לתקופת ההבשלה). מחירי הסגירה השבועיים הללו מומרים לתשואות הנגזרות מהלוגריתם הטבעי וסטיות התקן המדגמיות שלהם מתוקננות לשנתיות במטרה לקבל סטיות תקן שנתיות.

בנוסף, ניתן להשתמש באופציות LEAPS (Long-Term Equity Anticipation Securities) לאמידת התנודתיות של מניית הבסיס. אופציות LEAPS הן אופציות לטווחי זמן אורכים מהמקובל על מניות, וכאשר הזמן עובר כך שנשאר בערך שישה חודשים, אופציות אלה הופכות לאופציות רגילות על מניות. בכל אופן, בשל היעדר סחירות, מרווח הקנייה-מכירה על אופציות אלו נוטה להיות גדול יותר מהמרווחים על מניות סחירות. לאחר ביצוע Due diligence לאמידת סטיות התקן, נמצא שהמודל האקונומטרי GARCH לא מוגדר בצורה מספקת על מנת להיות תקף סטטיסטית. לכן, אנו חוזרים בחזרה לשימוש בתנודתיות המשתמעת או בסטיות התקן הגלומות באופציות לטווחי זמן אורכים או LEAPS, ולהשוואתם לסטיות התקן ההיסטוריות. האומד הנקודתי הבודד הטוב ביותר לתנודתיות הצפויה יהיה ממוצע של כל האומדים ביחד או 49.91%. בנוסף, נתוני תנודתיות על חברות השוואה ציבוריות עם תחומי פעילות, שווקים, סיכונים ומיקום גיאוגרפי דומים ובאותו מגזר חושבו ושימשו בניתוח. בכל אופן, בשל המרווח הגדול, יישמנו סימולציית Monte Carlo ע"י הרצת סימולציה Nonparametric על שיעורי התנודתיות הללו ; ולכן, כל תנודתיות שחושבה כאן תשמש בניתוח.

תקופת הבשלה

כל האופציות לעובדים המוענקות על ידי החברה מבשילות בשתי שכבות שונות: חודש ו- 6 חודשים. השכבה ראשונה, הלו אופציות המוענקות במשך תקופה של 48 חודשים, כאשר כל חודש, 1/48 מהאופציות מבשילות, עד לשנה הרביעית כאשר כל האופציות מבשילות לגמרי. השכבה האחרונה, היא תקופת הבשלה מסוג cliff, כאשר אם העובדים עוזבים תוך ששת החודשים הראשונים, הרי שכל האופציה המוענקת מחולטת. לאחר שישה חודשים, כל חודש נוסף מבשילה מנה נוספת מהאופציות של 1/42 מבשילה. כתוצאה מכך, תקופות הבשלה של חודש (1/12 שנים) ו- 6 חודשים (1/2 שנים) משמשות כנתוני קלט בניתוח. תוצאות הניתוח הן הערכת שווי פשוטה של האופציות. על מנת לקבל את ההוצאות בפועל, כל אופציה עם תקופת הבשלה של 48 חודשים מחולקת ל- 48 הענקות קטנות (minigrants) וההוצאות בגינה נרשמות לאורך כל תקופת ההבשלה.

מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית

נתון הקלט הבא הוא מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית. על מנת לקבל את נתון הקלט הזה, אספנו נתונים על כל האופציות שמומשו בשנה האחרונה. השתמשנו בשנה האחרונה, כאשר המסחר מ- 2000 ל- 2002 היה תנודתי ביותר ואנו מאמינים שבועת ההיי-טק גרמה לאירועים קיצוניים בשוק המניות להתרחש אשר אינם מייצגים את הציפיות שלנו לגבי העתיד. בנוסף, רק נתוני השנה האחרונה היו זמינים. תמונה 30 מראה את החישובים שבוצעו. מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית הוא פשוט היחס של מחיר המניה כאשר היא מומשה למחיר המימוש החוזי של האופציה. עובדים מפוטרים או עובדים שעזבו מרצון הוצאו מהניתוח. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שלעובדים העוזבים את החברה יש זמן מוגבל למימוש מנת האופציות שלהם שהבשילו. בנוסף, כל האופציות שלא הבשילו יפקעו כחסרות כל ערך. לבסוף, עובדים המחליטים לעזוב את החברה יודעים זאת מראש ועל כן יש להם התנהגות מימוש שונה מזו של עובדים רגילים. התנהגות לא אופטימאלית לא משחקת תפקיד בנסיבות הללו.

לחילופין, האירוע של עובד שעוזב נתפס ע"י שיעור החילוט. מכפיל ההתנהגות החציוני נמצא כ- 1.85, והוא נתון הקלט המשמש בניתוח. ערך זה מתיישב עם מחקר אמפירי קודם שהראה כי מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית טיפוסיים נעים בין 1.5 ל- 3.0. לדוגמא, Carpenter (1998) סיפקה כמה הוכחות אמפיריות כי עבור אופציה בעלת משך חיים של 10 שנים, מכפיל המימוש עבור מנהלים בכירים הוא 2.8.[39] Huddrat and Lang (1996) כי המכפיל הממוצע הוא 2.2 עבור כל העובדים, ולא רק עבור המנהלים הבכירים.[40] בנוסף, בהתבסס על מחקר של המחבר, המכפיל הטיפוסי נע בין 1.5 ל- 3.0.

השתמשנו בחציון ולא בממוצע הן מאחר וההתפלגות אינה סימטרית וזנב ההתפלגות מתרחב כלפי צד ימין (ה-Skewness הוא 3.99 כשבהתפלגות נורמאלית הוא 0), והן מאחר והממוצע רגיש יותר לנקודות במדגם סטטיסטי המרוחקות מהמקבץ העיקרי של הנקודות באותו מדגם, על כן החציון מועדף. תמונה 30 מראה כי החציון מייצג את הנטייה המרכזית של ההתפלגות יותר מאשר הממוצע. על מנת לאמת זאת, יישמנו שתי גישות נוספות לתיקוף

השימוש בחציון: טווחים מסודרים (trimmed ranges) ומבחני השערה סטטיסטיים. טווח מסודר נוצר כאשר הטווח של מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית מתעלם ממכפילים גבוהים כמו למשל כאלו שמחזיק האופציה יממש כאשר מחיר המניה יעבור את ה- 500$. זה מוצדק מאחר שבהינתן מחיר המניה הנוכחי הרי שזה בלתי סביר בעליל שהאופציה תמומש כאשר מחיר המניה יעבור את רף ה- 500$.[41] החציון שחושב באמצעות הסידור הסובייקטיבי הוא 1.84, קרוב לחציון הגלובלי ההתחלתי של 1.85.

---

[39]Carpenter, J. 1998. "The Exercise and Valuation of Executive Stock Options," *Journal of Financial Economics*, vol. 48, no. 2 (May): 127-58.

[40]Huddart S. and M. Lang. 1996. "Employee Stock Option Exercises: An Empirical Analysis," *Journal of Accounting and Economics*, vol.21, no. 1 (February): 5-43.

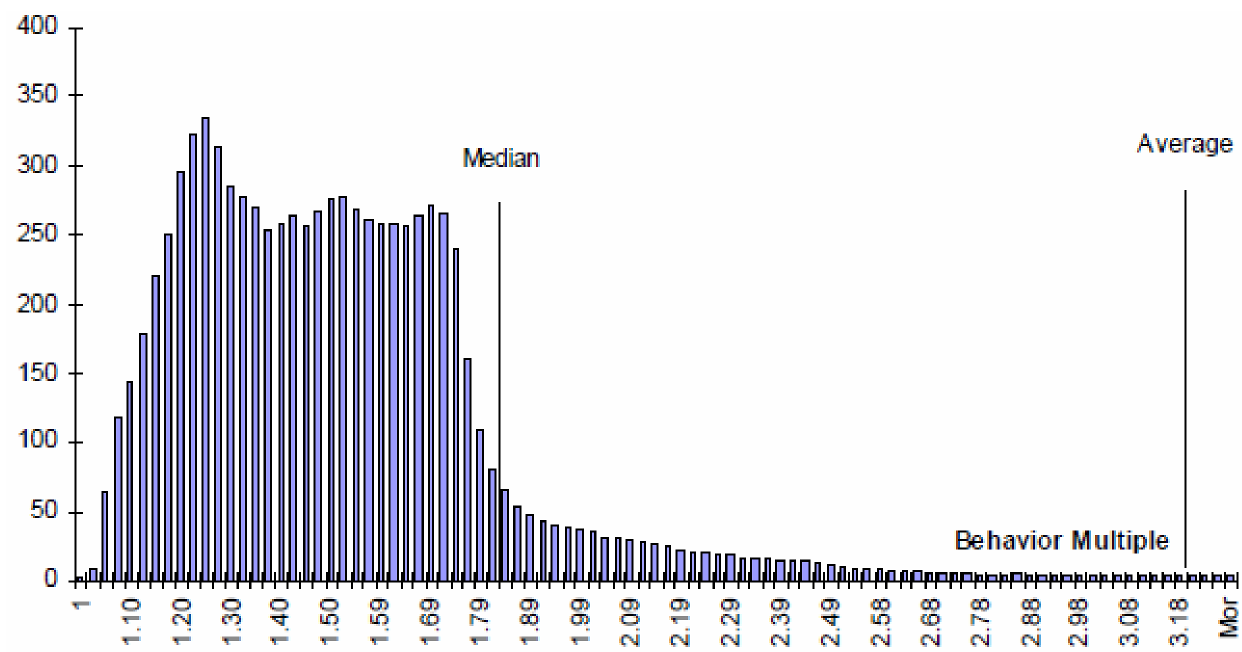
[41]שימוש בתהליך סטוכסטי Inverted Brownian Motion, נקודת ה- 99.9% הכותמת את ההתפלגות נקבעה עבור מחיר מניה עם תקופת זמן מוגדרת ובהינתן התנודתיות.

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן היסטוגרמת התנהגות המימוש כאשר על ציר ה- Y התדירות ועל ציר ה- X מכפיל התנהגות המימוש :

מספר עובד	מספר אופציה	תאריך המימוש	מניות	ערך הבסיס	מחיר האופציה	מועד ההענקה	מועד העזיבה	מכפיל התנהגות
10518	38509	28/08/2003	469	$34.2900	$11.3333	05/08/1998		3.0256
89961	59850	29/08/2003	2,269	$34.2900	$15.1389	16/02/1999		2.2650
95867	88519	03/09/2003	2,194	$36.9200	$28.7200	08/03/2001		1.2855
41038	1942	31/12/2003	352	$37.2000	$21.8055	09/11/2002		2.2878
14289	86393	31/12/2003	488	$37.2000	$16.2600	03/08/2001		1.2953
5025	24881	29/09/2003	2,108	$32.4600	$16.2600	10/08/1999		1.4886
16831	3722	28/10/2003	880	$37.2600	$16.2600	19/11/2002		2.2915
2200	22351	28/08/2003	127	$33.5000	$16.2600	19/11/2002	16/03/2004	
34637	28862	28/07/2003	99	$30.6000	$16.2600	19/11/2002		1.8819
36058	55587	30/10/2003	29	$37.5400	$16.2600	19/11/2002		2.3087
35882	37498	31/10/2003	155	$37.5400	$19.0600	04/04/2003		1.9696
46869	91075	28/07/2003	309	$30.6000	$19.0600	04/04/2003		1.6055
30738	42903	01/12/2003	300	$38.2784	$17.7100	04/11/2002	09/04/2004	
80763	97583	02/09/2003	20	$34.5000	$16.2600	19/11/2002		2.1218
25998	99218	03/09/2003	224	$36.0000	$16.2600	19/11/2002		2.2140
5817	95193	02/09/2003	23	$34.5000	$28.7200	31/08/2001		1.2013
81744	70651	14/11/2003	2,000	$36.5700	$11.1389	15/07/1998		3.2831
46899	97264	24/11/2003	1,000	$36.7800	$11.1389	15/07/1998		3.3019
75145	30371	15/12/2003	511	$37.1700	$11.1389	15/07/1998		3.3370
77678	35472	30/12/2003	1,500	$37.2850	$11.1389	15/07/1998		3.3473
20244	7897	15/12/2003	1,000	$37.1550	$11.1389	15/07/1998		3.3356
36156	6874	30/10/2003	1,100	$37.5400	$28.7200	31/08/2001		1.3071

מקסימום	160.5263
מינימום	1.0000
ממוצע	3.3576
חציון	1.8530

הערה: לא כולל התנהגות של עובדים מפוטרים



תמונה 30 – אמידת מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית

בנוסף, ניתוח יותר אובייקטיבי, מבחני השערה סטטיסטיים , בוצע בעזרת מבחן t חד זנבי למשתנה בודד, והאחוזון הסטטיסטי ה- 99.9 (אלפא של 0.0001) מתוך התפלגות t (השתמשנו בהתפלגות t כדי להביא בחשבון את ה- Skew וה- kurtosis של ההתפלגות – הערכים הקיצוניים שלה וזנבות עבים) נמצא כ- 3.92 (תמונה 31). החציון עומד על 1.76 והוא חושב מתוך טווח של מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית הנע בין 1.0 ל- 3.92. על כן ניתן להסיק

ששימוש בחציון הגלובאלי של 1.85 הוא שמרני ביותר ומייצג הכי טוב את התנהגות המימוש הלא אופטימאלית של העובדים.[42]

One-Sample Hypothesis T-Test:
Suboptimal Exercise Behavior
Test of null hypothesis: mean = 3.754
Test of alternate hypothesis: mean < 3.754
Alpha one-tail of 1%

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean
Behavior	8530	3.469	11.312	0.122

Variable	99.99% Upper Bound	T	P
Behavior	3.925	-2.33	0.01

Therefore, the 99.99th statistical percentile cut-off is 3.925

The average for the range between 1.000 and 3.925 is
Average 1.7954
Median 1.7689

Therefore, with the three values indicating a suboptimal behavior multiple at around 1.7689, 1.8450 and 1.8531, using the median of all data points provides the best indication as all data are used...
The resulting suboptimal behavior multiple used is
Global Median 1.8531

תמונה 31 – אמידת מכפילי התנהגות מימוש לא אופטימאלית עם מבחני השערה סטטיסטיים

[42] ככל שנקבע מכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית גבוה יותר, כך ערך האופציה גבוה יותר – אומד שמרני למכפיל משמעותו שהוא נקבע כגבוה יותר על מנת לא להעריך בחסר את האופציה.

שיעורי חילוט

שיעור החילוט מחושב ע"י השוואת מספר ההענקות שבוטלו ביחס לסך ההענקות. הערך מחושב על בסיס חודשי והתוצאות מוצגות בתמונה 32. שיעור החילוט הממוצע נמצא כ- 5.51%. בנוסף, שיעור עזיבת העובדים הממוצע בארבע השנים האחרונות היה 5.5% לשנה. על כן, השתמשנו בניתוח ב- 5.51%.

מספר עובד	מספר אופציה	מועד ההענקה	תוכנית	מועד החילוט	סיבת החילוט	כמות	מחיר	סה"כ	ימים עד לחילוט
						Sum	Count		**שנים**
						241,374	133		**0.34**
18292	NI273822	04/08/2003	2003	31/12/2003	עזיבה מרצון	4,300	$30.8800	$132,784.00	149
18159	00273892	05/08/2003	2003	31/12/2003	פיטורין	330	$30.8800	$10,190.40	149
16794	00273401	25/07/2003	2003	31/12/2003	עזיבה מרצון	2,000	$30.7600	$61,520.00	159
16807	NI273719	25/07/2003	2003	31/12/2003	עזיבה מרצון	2,000	$30.7600	$61,520.00	159
16666	00273415	25/07/2003	2003	31/12/2003	פיטורין	2,000	$30.7600	$61,520.00	159
16666	00273771	25/07/2003	2003	31/12/2003	פיטורין	3,134	$30.7600	$96,401.84	159
18023	00273288	03/07/2003	2003	31/12/2003	עזיבה מרצון	4,900	$29.4200	$144,158.00	181
5257	00273015	02/05/2003	1993	31/12/2003	עזיבה מרצון	333	$23.6900	$7,888.77	243
17598	NI272903	02/05/2003	1993	31/12/2003	עזיבה מרצון	2,916	$23.6900	$69,080.04	243
16897	00273721	25/07/2003	2003	26/12/2003	עזיבה מרצון	2,750	$30.7600	$84,590.00	154
17063	P0002027	26/06/2003	PR98	26/12/2003	עזיבה מרצון	404	$28.4600	$11,497.84	183
16897	P0001979	01/04/2003	PR98	26/12/2003	עזיבה מרצון	2,022	$24.6300	$49,801.86	169
8092	NI273111	04/06/2003	2003	23/12/2003	עזיבה מרצון	1,281	$28.4590	$36,455.98	202
19094	00274451	04/12/2003	2003	22/12/2003	עזיבה מרצון	5,600	$37.3200	$208,992.00	18
5428	00272981	02/05/2003	1993	19/12/2003	עזיבה מרצון	462	$23.6900	$10,944.78	231
5428	00272795	04/04/2003	1993	19/12/2003	עזיבה מרצון	462	$19.0600	$8,805.72	259
18103	00273913	04/08/2003	2003	15/12/2003	עזיבה מרצון	8	$30.8800	$247.04	133
8102	NI272622	04/03/2003	1993	09/12/2003	עזיבה מרצון	396	$16.0600	$6,359.76	280
5361	00273024	02/05/2003	1993	05/12/2003	עזיבה מרצון	875	$23.6900	$20,728.75	217
18911	00274455	04/12/2003	2003	04/12/2003	עזיבה מרצון	750	$37.3200	$27,990.00	0
17840	00273283	03/07/2003	2003	04/12/2003	עזיבה מרצון	3,500	$29.4200	$102,970.00	154
18721	00274339	04/11/2003	2003	03/12/2003	פיטורין	900	$37.0500	$33,345.00	29

תמונה 32 – אמידת שיעורי החילוט

איטרציות (מספר תקופות בינומיות)

ככל שמספר האיטרציות, קרי התקופות הבינומיות, גדול יותר כך דיוק התוצאות גבוה יותר. תמונה 33 מראה את ההתכנסות של התוצאות המתקבלות משימוש במודל סגור מסוג Black & Scholes עבור אופציית Call אירופאית על מניה המחלקת דיבידנד והשוואת התוצאות הללו למודל הרשת הבינומי הבסיסי. באופן כללי ההתכנסות מושגת עבור 1,000 איטרציות. על כן, בניתוח התוצאות נשתמש ב- 1,000 מתי שיתאפשר.[43] בשל הדרישה למספר איטרציות גבוה עבור יצירת התוצאות, השתמשנו בתוכנה המבוססת על אלגוריתמים מתמטיים.[44] לדוגמא, עבור מודל רשת בינומי לא רציף עם 1,000 תקופות יש לחשב $2 \text{ X } 10^{301}$ צמתים, מה שהופך את החישוב הידני לבלתי אפשרי ללא שימוש באלגוריתמים ספציפיים.[45] תמונה 34 מראה את החישוב של ההתכנסות ע"י שימוש במספר תקופות בינומיות הגדל בהדרגה. ההתקדמות מבוסס על 120 תקופות (12 חודשים בשנה כפול 10). התוצאות אורגנו בטבלה והחציון של

---

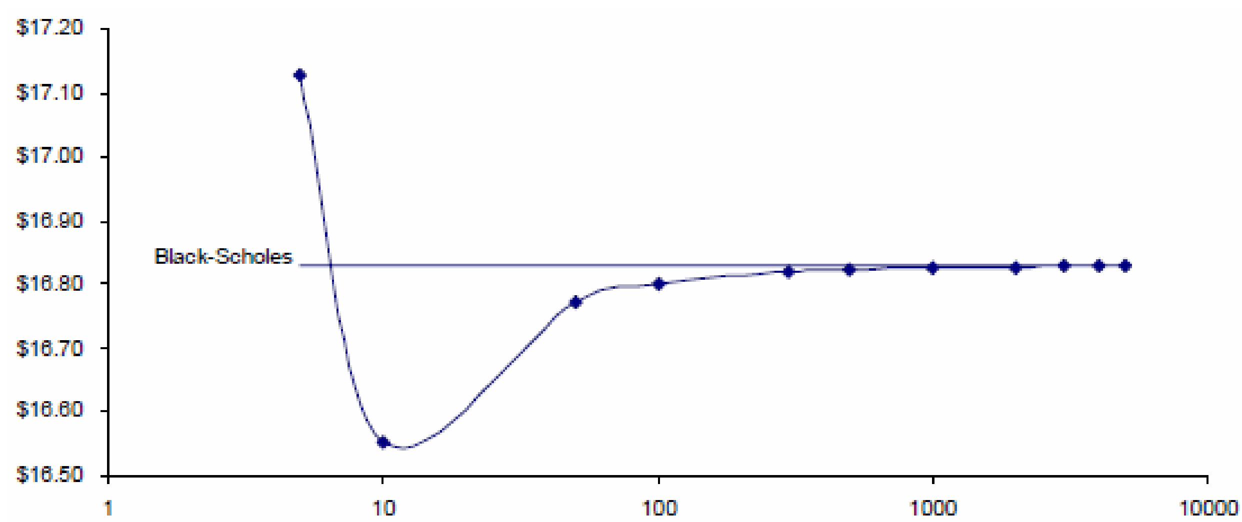
[43] באופן כללי מודל הרשת הבינומי המותאם אישית עם 1,000 איטרציות שימש אותנו, פרט למקרים שבהם צוין אחרת. לפעמים עלייה מ- 1,000 ל- 5,000 איטרציות שימשה אותנו לבדיקת ההתכנסות. בכל אופן, בשל אי הרציפות של אופציות עם תנודתיות משתנה, יש להשתמש במספר איטרציות נמוך יוצר.

[44] האלגוריתם פותח ע"י ד"ר Johnathan Mun.

[45] מודל רשת בינומי לא רציף מתפצל לשניים בכל תקופה, כך שמתחילים מערך אחד שממנו יוצאים שני ערכים בתקופה הראשונה (2^1), שניים הופכים לארבעה בתקופה השנייה (2^2), וארבעה הופכים לשמונה בתקופה השלישית (2^3), וכך הלאה עד שבתקופה ה- 1,000 (2^{1000} או למעלה מ- 10301 ערכים לחישוב, כך שמחשב העל המהיר ביותר בעולם לא יוכל לחשב את התוצאה בזמן החיים שלנו).

ממוצע התוצאות חושב. ניתן לראות כי 4,200 איטרציות הם האומד הטוב ביותר במודל הרשת הבינומי המותאם אישית שלנו, ונתון קלט זה שימש בניתוח.[46]

לשם הנוחות ולמען השוואה, להלן ניתוח רגישות חד פרמטרי, במתודת חישוב "What if", לערך האופציה על בסיס המודל הבינומי ביחס לשינויים במספר האיטרציות (תקופות בינומיות):



תמונה 33 – התכנסות מודל הרשת הבינומי לפתרונות המודל הסגור

מחיר מניה	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17
מחיר מימוש	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17	$45.17
משך חיים חוזי	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
שיעור ריבית חסרת הסיכון	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%	1.21%
תנודתיות	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%	49.91%
תשואת דיבידנד	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
איטרציות	10	50	100	120	600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400	6000
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531	1.8531
תקופת הבשלה	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
מודל בינומי	$20.55	$17.82	$17.32	$18.55	$17.55	$13.08	$13.11	$12.93	$12.88	$12.91	$13.00	$13.08	$12.93	$13.06

מקטע	איטרציות	תוצאות	ממוצע
1	120	$18.55	$13.91
5	600	$17.55	$13.45
10	1200	$13.08	$13.00
15	1800	$13.11	$12.99
20	2400	$12.93	$12.97
25	3000	$12.88	$12.97
30	3600	$12.91	$12.99
35	4200	$13.00	$13.00
40	4800	$13.08	$13.02
45	5400	$12.93	$12.99
50	6000	$13.06	$13.06
		חציון	$13.00

תמונה 34 – התכנסות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית

[46] חוק המספרים הגדולים קובע שהנטייה המרכזית (התוחלת) של התפלגות הממוצעים היא אומד חסר הטיה של האוכלוסייה האמיתית. התוצאות משימוש ב- 4,200 איטרציות מציגות את הממוצע בהשוואה לחציון של התפלגות הממוצעים, ולכן 4,200 איטרציות נבחרו כנתון קלט במודל הרשת הבינומי.

20. טיפול בשיעורי החילוט

יש להיזהר בשימוש בשיעורי החילוט במודל הרשת הבינומי המותאם אישית. הטיפול בשיעורי החילוט מביא להבדלים בתוצאות הערכת שווי של אופציות. ספציפית, שיעורי החילוט ניתנים להחדרה לתוך מודל הרשת הבינומי המותאם אישית (החישובים מבוצעים בתוך אלגוריתם הרשת) או לחילופין ניתנים לשימוש מחוץ למודל (התאמת התוצאות לאחר קבלתן ממודל הרשת הבינומי). הערכת השווי המתקבלת ברוב המקרים ותחת רוב התנאים תהיה שונה. תמונה 35 מציגה חלק מההפרשים הלא טריוויאליים בהערכת השווי בין שימוש בשיעורי החילוט בתוך מודל הרשת הבינומי ומחוצה לו עבור אופציה לעובדים טיפוסית. ניתן לומר ששימוש בשיעורי חילוט בתוך המודל מביא לערך אופציה נמוך יותר מזה המתקבל משימוש בשיעורי החילוט מחוץ למודל.

הערכת שווי אופציות לעובדים כאשר שיעור החילוט בתוך המודל מול הערכת שווי אופציות לעובדים כאשר שיעור החילוט מחוץ למודל

מחיר מניה	$50	$50	$50	$50	$50	$50	$50	$50
מחיר מימוש	$50	$50	$50	$50	$50	$50	$50	$50
משך חיים חוזי	10	10	10	10	10	10	10	10
שיעור ריבית חסרת הסיכון	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%	3.50%
תנודתיות	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
תשואת דיבידנד	55%	55%	55%	55%	55%	55%	55%	55%
איטרציות	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
תקופת הבשלה	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
שיעור חילוט	**0.00%**	**2.50%**	**5.00%**	**7.50%**	**10.00%**	**12.50%**	**15.00%**	**20.00%**
מודל Black & Scholes נאיבי	$34.02	$34.02	$34.02	$34.02	$34.02	$34.02	$34.02	$34.02
מודל בינומי מותאם אישית (שיעור החילוט בתוך המודל)	$22.60	$21.45	$20.40	$19.44	$18.56	$17.75	$16.99	$15.63
מודל בינומי מותאם אישית (שיעור החילוט מחוץ המודל)	$22.60	$22.04	$21.47	$20.91	$20.34	$19.78	$19.21	$18.08
ההפרש	$0.00	-$0.59	-$1.07	-$1.47	-$1.78	-$2.03	-$2.22	-$2.45

תמונה 35 – השוואת הטיפול בשיעורי החילוט

אם מיישמים את שיעור החילוט בתוך מודל הרשת הבינומי, שלדעתנו היא השיטה הנכונה, הרי שכאשר משתמשים באלגוריתם הרשת הבינומי המותאם אישית, פשוט לוקחים את שיעור החילוט כנתון קלט. בנוסף, שיעורי החילוט יכולים להשתנות לאורך זמן באלגוריתם הרשת הבינומי המותאם אישית. אם משתמשים בשיעור החילוט מחוץ למודל, הרי שפשוט קובעים את שיעורי החילוט על אפס במודל הרשת הבינומי ומכפילים את תוצאת הערכת השווי או את כמות האופציות המוענקות ב: $(1-Forfeiture)$.[47] על מנת להבין את ההשלכות של טיפול פנימי מול טיפול חיצוני בשיעורי החילוט, עלינו להבין תחילה כיצד שיעורי החילוט משמשים במודל.

כאשר משתמשים בשיעור החילוט בתוך מודל הרשת, הרי שמשתמשים בו להכשיר את מודל הרשת הבינומי המותאם אישית לאפס אם העובדים מפוטרים או עוזבים במהלך תקופת ההבשלה. לאחר ההבשלה, משתמשים בשיעור החילוט להכשיר את מודל הרשת הבינומי המותאם אישית למימוש האופציה אם היא ״בתוך הכסף״ או לאפשר לה לפקוע כחסרת כל ערך במצבי סחירות אחרים (״מחוץ לכסף״ או ״״בכסף״), בהתעלם ממכפיל התנהגות

[47] השפעה זו זהה להשפעה של הכפלת מספר האופציות המוענקות ב (1-Forfeiture) מאחר וסך הערכת השווי הוא המחיר כפול הכמות כפול (1-Forfeiture), כך שאין זה משנה אם התאמת החילוט נעשית על המחיר או על כמות האופציות המוענקות, כל עוד מיישמים זאת פעם אחת בלבד.

המימוש הלא אופטימאלית כאשר העובדים עוזבים. זה חשוב בשל האינטראקציות הלא ליניאריות בין המשתנים, ע״י הכנסת שיעורי החילוט לתוך המודל, האינטראקציות הללו יופסקו במודל –למשל, שיעורי חילוט שולטים כאשר עובדים עוזבים, אך מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימאלית ותקופת הבשלה שולטים כאשר אין כל חילוטים, ועל כן פעולות העובדים יהיו תלויות בשיעור החילוט ובמכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית. נשתמש בשיעור הזה בתוך מודל הרשת הבינומי המותאם אישית. קרי, בצמתים מסוימים, ערכו של המודל הבינומי הופך לחסר ערך כאשר צפוי שהאופציה תחולט. זה ישים יותר בחיים האמיתיים כאשר אם עובד המחזיק במנה גדולה של אופציות לעובדים, הרי שהאופציות לעובדים אותן הוא מחזיק הופכות לחסרות כל ערך (בתקופת ההבשלה או לאחר ההבשלה אם האופציות לעובדים הן ״בכסף״ או ״מחוץ לכסף״). במילים אחרות, לכל מנת אופציה משך חיים צפוי שונה (הנקודה שבה מתרחש חילוט היא הנקודה שבה ערך האופציה הופך לאפס או שהאופציה ממומשת אם היא ״בתוך הכסף״), ושימוש בחישוב בשיטת האינדוקציה לאחור יביא לערכים שונים בהשוואה ליישום שיעורי החילוט מחוץ למודל.

מאידך, כאשר משתמשים בשיעור החילוט מחוץ למודל, המשמעות בהערכת השווי היא שכל המנות אף פעם לא יחולטו. תיקון החילוט יתרחש רק לאחר מכן. במילים אחרות, כל האופציות לעובדים יפקעו והערכים שלהם יתבססו על משך החיים בפועל. אז, הערכים הללו יותאמו לחילוטים. זה פחות סביר שיקרה בעולם האמיתי מאחר ומשמעות הדבר היא שכל העובדים שפוטרו או עזבו מרצון יעזבו רק בסוף תקופת הפקיעה. אם זה היה המקרה, אזי בפקיעה, היינו לאחר תקופת ההבשלה בכל מקרה ובהגדרה , עובדים יוכלו לממש את האופציות לעובדים שלהם אם הן ״בתוך הכסף״. לכן, תיקון החילוטים בשיטה זו חסר כל היגיון. בנוסף, ע״י קביעת שיעורי החילוט מחוץ למודל, כל האינטראקציות בין שיעורי החילוט, תקופת ההבשלה, ומכפיל התנהגות המימוש הלא אופטימאלית (ראה את הדוגמאות על אי הליניאריות והאינטראקציות בין המשתנים בתחילת המאמר) יאבדו. לבסוף, קביעת שיעורי החילוט מחוץ למודל הרשת פירושו של דבר שמצב תעסוקת העובדים לא משחק תפקיד בקביעה האם האופציות לעובדים ימומשו או לא. מצב שחסר כל היגיון. אם עובדים מחלטים את האופציות לעובדים לאחר שהן הבשילו, הרי שלעובדים יש זמן מוגבל למימוש האופציות או להפסיד אותן. כמו כן, בהשארת שיעור החילוט מחוץ למודל, מונח שהעובדים יממשו את האופציות לעובדים כאשר מחיר המניה יעלה מעל לרף מימוש לא אופטימאלי בהתעלם ממצב התעסוקה שלהם, מה שמפר שוב את הדרישות החוזיות באופציות לעובדים, במיוחד כאשר העובדים חילטו כבר את האופציות. בהמשך למה שנאמר, לא משנה כיצד מיישמים את שיעורי החילוט, ככל ששיעור החילוט גבוה יותר, כך ערך האופציה נעשה נמוך יותר. אם זאת, כפי שניתן לראות בתמונה 35, הערכת שווי אופציה באמצעות שיעורי חילוט ע״י הכנסתם למודל מורידה את ערך האופציה יותר מאשר השארתם מחוץ למודל.

21. תוצאות הערכת השווי

בתמונה 36 ניתן לראות את שוויים ההוגן של אופציות במועדי הענקה שונים ובמחירי מניה חזויים שונים באמצעות שימוש במתודולוגיית מודל הרשת הבינומי המותאם אישית ביחד עם סימולציית Monte Carlo. לדוגמא, למועד ההענקה של ינואר 2005 יש תחזית מחיר מניה שמרנית של $45.17 ותוצאת מודל הרשת הבינומי שלו היא $17.39 עבור אופציה עם תקופת הבשלה של חודש, ו- $17.42 עבור אופציה עם תקופת הבשלה של 6 חודשים. מאידך, אם נתקנן את מודל Black & Scholes לשימוש במשך החיים הצפוי של האופציה (אשר נקבע כערך האפשרי הנמוך ביותר של 4 שנים, שקול לתקופת ההבשלה של 4 שנים)[48], ערך האופציה עדיין גבוה מספיק ב- $19.55. הפחתת העלות היא $2.16 בהשוואה לשימוש במודל Black & Scholes, או קיטון של 12.42% בעלות אופציה בודדת. כאשר כל האופציות מחושבות ומוכפלות במספר המנות שלהן, סך הערכת השווי תחת מודל Black & Scholes המסורתי הוא $863,961,092 לאחר לקיחת בחשבון של שיעור חילוט ברמה של 5.51%. מאידך סך הערכת השווי עבור מודל הרשת הבינומי המותאם אישית הוא $813,997,676, ירידה של $49,963,417 במשך תקופה של שנתיים. תמונה 37 מראה דוגמה מפורטת של החישוב.

ע״פ תמונה 37 שוויה ההוגן של אופציה שהוענקה בינואר 2005 הוא $17.39 כאשר השווי חושב באמצעות 124,900 הרצות של סימולציית Monte Carlo על מודל הרשת הבינומי המותאם אישית עם שגיאה של $0.01 ורמת ביטחון סטטיסטית של 99.9%. לכל הענקה המתוארת בתמונה 36 ישנה תוצאת סימולציה משלה המתוארת כמו זו המתוארת בתמונה 37.

שימוש במתודולוגיית מודל הרשת הבינומי המותאם אישית ביחד עם סימולציית Monte Carlo,

מחירי הסגירה של המניה					48 חודשי הבשלה		6 חודשי חסימה ולאחר מכן 42 חודשי הבשלה	
תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע		הענקה חדשה	רכישה	מוקד	סה"כ
סוף דצמבר 2004/תחילת ינואר 2005	$45.17	$50.70	$47.93	ינואר-05	550,000			550,000
סוף ינואר 2005/תחילת פברואר 2005	$45.89	$51.52	$48.70	פברואר-05	550,000			550,000
סוף פברואר 2005/תחילת מרץ 2005	$46.61	$52.34	$49.48	מרץ-05	550,000			550,000
סוף מרץ 2005/תחילת אפריל 2005	$47.34	$53.16	$50.25	אפריל-05	550,000			550,000
סוף אפריל 2005/תחילת מאי 2005	$48.06	$53.98	$51.02	מאי-05	550,000			550,000
סוף מאי 2005/תחילת יוני 2005	$48.78	$54.81	$51.79	יוני-05	605,000			605,000
סוף יוני 2005/תחילת יולי 2005	$49.51	$55.63	$52.57	יולי-05	605,000			605,000
סוף יולי 2005/תחילת אוגוסט 2005	$50.23	$56.45	$53.34	אוגוסט-05	605,000			605,000
סוף אוגוסט 2005/תחילת ספטמבר 2005	$50.95	$57.27	$54.11	ספטמבר-05	605,000	2,500,000		3,105,000
סוף ספטמבר 2005/תחילת אוקטובר 2005	$51.68	$58.09	$54.89	אוקטובר-05	605,000			605,000
סוף אוקטובר 2005/תחילת נובמבר 2005	$52.40	$58.92	$55.66	נובמבר-05	605,000			605,000
סוף נובמבר 2005/תחילת דצמבר 2005	$53.13	$59.74	$56.43	דצמבר-05	605,000		7,492,100	8,097,100
סוף דצמבר 2005/תחילת ינואר 2006	$53.85	$60.56	$57.20	ינואר-06	605,000			605,000
סוף ינואר 2006/תחילת פברואר 2006	$54.55	$61.36	$57.95	פברואר-06	605,000			605,000
סוף פברואר 2006/תחילת מרץ 2006	$55.25	$62.15	$58.70	מרץ-06	605,000			605,000
סוף מרץ 2006/תחילת אפריל 2006	$55.95	$62.95	$59.45	אפריל-06	605,000			605,000
סוף אפריל 2006/תחילת מאי 2006	$56.66	$63.75	$60.20	מאי-06	605,000			605,000
סוף מאי 2006/תחילת יוני 2006	$57.36	$64.55	$60.95	יוני-06	665,500			665,500
סוף יוני 2006/תחילת יולי 2006	$58.06	$65.34	$61.70	יולי-06	665,500			665,500
סוף יולי 2006/תחילת אוגוסט 2006	$58.76	$66.14	$62.45	אוגוסט-06	665,500			665,500
סוף אוגוסט 2006/תחילת ספטמבר 2006	$59.46	$66.94	$63.20	ספטמבר-06	665,500	3,000,000		3,665,500
סוף ספטמבר 2006/תחילת אוקטובר 2006	$60.16	$67.74	$63.95	אוקטובר-06	665,500			665,500
סוף אוקטובר 2006/תחילת נובמבר 2006	$60.87	$68.53	$64.70	נובמבר-06	665,500		8,241,310	8,906,810
סוף נובמבר 2006/תחילת דצמבר 2006	$61.57	$69.33	$65.45	דצמבר-06	665,500			665,500

[48] זהו המקרה הקיצוני שבו אנו מניחים כי 100% מהאופציות לעובדים ימומשו ברגע שהן יבשילו לחלוטין, על מנת למזער את תוצאות מודל Black & Scholes.

הערכת שווי אופציות (חודשי)

תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע
ינואר-05	$17.39	$19.52	$18.46
פברואר-05	$17.67	$19.84	$18.76
מרץ-05	$17.95	$20.16	$19.05
אפריל-05	$18.23	$20.47	$19.35
מאי-05	$18.51	$20.79	$19.65
יוני-05	$18.79	$21.11	$19.95
יולי-05	$19.06	$21.42	$20.24
אוגוסט-05	$19.34	$21.74	$20.54
ספטמבר-05	$19.62	$22.05	$20.84
אוקטובר-05	$19.90	$22.37	$21.14
נובמבר-05	$20.18	$22.69	$21.43
דצמבר-05	$20.46	$23.00	$21.73
ינואר-06	$20.74	$23.32	$22.03
פברואר-06	$21.01	$23.63	$22.32
מרץ-06	$21.28	$23.94	$22.61
אפריל-06	$21.55	$24.24	$22.89
מאי-06	$21.82	$24.55	$23.18
יוני-06	$22.09	$24.86	$23.47
יולי-06	$22.36	$25.16	$23.76
אוגוסט-06	$22.63	$25.47	$24.05
ספטמבר-06	$22.90	$25.78	$24.34
אוקטובר-06	$23.17	$26.09	$24.63
נובמבר-06	$23.44	$26.39	$24.92
דצמבר-06	$23.71	$26.70	$25.20

הערכת שווי אופציות (הבשלה)

תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע
ינואר-05	$17.42	$19.55	$18.79
פברואר-05	$17.70	$19.87	$18.78
מרץ-05	$17.98	$20.19	$19.08
אפריל-05	$18.26	$20.50	$19.38
מאי-05	$18.54	$20.82	$19.68
יוני-05	$18.81	$21.14	$19.98
יולי-05	$19.09	$21.45	$20.27
אוגוסט-05	$19.37	$21.77	$20.57
ספטמבר-05	$19.65	$22.09	$20.87
אוקטובר-05	$19.93	$22.41	$21.17
נובמבר-05	$20.21	$22.72	$21.47
דצמבר-05	$20.49	$23.04	$21.76
ינואר-06	$20.77	$23.36	$21.06
פברואר-06	$21.04	$23.66	$22.35
מרץ-06	$21.31	$23.97	$22.64
אפריל-06	$21.58	$24.28	$22.93
מאי-06	$21.85	$24.59	$23.22
יוני-06	$22.12	$24.89	$23.51
יולי-06	$22.39	$25.20	$23.80
אוגוסט-06	$22.66	$25.51	$24.09
ספטמבר-06	$22.93	$25.82	$24.38
אוקטובר-06	$23.20	$26.12	$24.66
נובמבר-06	$23.47	$26.43	$24.95
דצמבר-06	$23.75	$26.74	$25.24

סך הוצאות בגין אופציות (מודל בינומי): $813,997,675.53

תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע
ינואר-05	$9,566,052.74	$107,373,306.72	$10,151,679.73
פברואר-05	$9,719,311.21	$10,911,406.31	$10,315,358.76
מרץ-05	$9,872,590.87	$11,085,484.73	$10,479,037.80
אפריל-05	$10,025,849.35	$11,259,584.33	$10,642,716.84
מאי-05	$10,179,107.83	$11,433,662.74	$10,806,395.88
יוני-05	$11,365,602.93	$12,768,538.58	$12,067,082.40
יולי-05	$11,534,210.56	$12,960,024.83	$12,247,106.05
אוגוסט-05	$11,702,794.88	$13,151,534.39	$12,247,152.99
ספטמבר-05	$60,926,665.19	$68,479,589.19	$64,703,067.40
אוקטובר-05	$12,039,963.53	$13,534,530.21	$12,787,246.87
נובמבר-05	$163,625,443.32	$183,963,675.91	$173,794,559.61
דצמבר-05	$12,377,155.48	$13,917,526.02	$13,147,340.75
ינואר-06	$12,545,739.81	$14,109,035.58	$13,327,387.69
פברואר-06	$12,709,221.87	$14,294,860.42	$13,502,052.80
מרץ-06	$12,872,727.23	$14,480,685.27	$23,676,694.60
אפריל-06	$13,036,232.59	$14,666,510.11	$13,851,359.70
מאי-06	$13,199,714.65	$14,852,311.66	$14,026,024.81
יוני-06	$14,699,542.02	$167,541,950.16	$15,620,733.27
יולי-06	$14,879,372.29	$16,746,357.48	$15,812,864.89
אוגוסט-06	$15,059,202.56	$16,950,764.81	$16,004,996.50
ספטמבר-06	$83,935,039.46	$94,488,780.60	$89,211,839.45
אוקטובר-06	$15,418,914.35	$17,359,579.47	$16,389,234.10
נובמבר-06	$209,062,661.14	$235,401,537.28	$222,232,270.95
דצמבר-06	$15,778,600.52	$17,768,368.50	$16,773,471.70

הערכת שווי אופציות (מודל Black & Scholes)

תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע
ינואר-05	$19.55	$21.94	$20.75
פברואר-05	$19.86	$22.30	$21.08
מרץ-05	$20.18	$22.66	$21.42
אפריל-05	$20.49	$23.01	$21.75
מאי-05	$20.80	$23.37	$22.09
יוני-05	$21.12	$23.72	$22.42
יולי-05	$21.43	$24.08	$22.75
אוגוסט-05	$21.74	$24.43	$23.09
ספטמבר-05	$22.06	$24.79	$23.42
אוקטובר-05	$22.37	$25.15	$23.76
נובמבר-05	$22.68	$25.50	$24.09
דצמבר-05	$23.00	$25.86	$24.43
ינואר-06	$23.31	$26.21	$24.76
פברואר-06	$23.61	$26.56	$25.09
מרץ-06	$23.92	$26.90	$25.41
אפריל-06	$24.22	$27.25	$25.73
מאי-06	$24.52	$27.59	$26.06
יוני-06	$24.83	$27.94	$26.38
יולי-06	$25.13	$28.28	$26.71
אוגוסט-06	$25.44	$28.63	$27.03
ספטמבר-06	$25.74	$28.98	$37.36
אוקטובר-06	$26.04	29,32	$27.68
נובמבר-06	$26.35	$29.67	$28.01
דצמבר-06	$26.65	$30.01	$28.33

סך הוצאות בגין אופציות (מודל Black & Scholes): $914,341,297.69

תאריך	שמרני	אגרסיבי	ממוצע
ינואר-05	$10,752,660.26	$12,069,200.79	$11,410,930.53
פברואר-05	$10,924,929.47	$12,264,896.33	$11,594,912.90
מרץ-05	$11,097,222.49	$12,460,568.06	$11,778,895.27
אפריל-05	$11,269,491.70	$12,656,263.59	$11,962,877.65
מאי-05	$11,441,760.91	$12,851,935.32	$12,146,860.02
יוני-05	$12,775,433.13	$14,352,393.94	$13,563,926.63
יולי-05	$12,964,955.45	$14,567,632.85	$13,766,281.05
אוגוסט-05	$13,154,451.58	$14,782,897.94	$13,968,661.66
ספטמבר-05	$68,484,227.49	$76,974,043.30	$72,729,068.19
אוקטובר-05	$13,533,443.84	$15,213,401.93	$14,373,422.88
נובמבר-05	$183,662,838.36	$206,491,668.93	$195,077,253.65
דצמבר-05	$13,912,462.28	$15,643,905.92	$14,778,184.10
ינואר-06	$14,101,958.41	$15,859,171.01	$14,980,564.71
פברואר-06	$14,285,719.38	$16,068,046.23	$15,176,895.90
מרץ-06	$14,469,506.53	$16,276,921.46	$15,373,200.90
אפריל-06	$14,653,293.69	$16,485,769.69	$15,569,532.09
מאי-06	$14,837,054.65	$16,694,645.72	$15,765,863.28
יוני-06	$16,522,925.99	$18,593,873.04	$17,558,385.11
יולי-06	$16,725,063.05	$18,823,635.79	$17,774,249.42
אוגוסט-06	$16,927,200.11	$19,053,398.54	$17,990,313.73
ספטמבר-06	$94,346,643.11	$106,209,508.20	$100,277,996.32
אוקטובר-06	$17,331,531.85	$19,512,924.04	$18,422,213.54
נובמבר-06	$234,664,248.79	$264,228,555.25	$249,446,594.79
דצמבר-06	$17,735,834.78	$19,972,420.73	$18,854,113.35

הנחות עיקריות ותוצאות

	שנה	שיעור ריבית חסרת סיכון
	1	1.21%
	2	2.19%
	3	3.21%
	4	3.85%
	5	4.68%
	6	4.59%
	7	5.11%
	8	4.91%
	9	5.25%
	10	5.59%
משך חיים חוזי		10
תשואת דיבידנד		0.00%
תנודתיות		49.91%
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית		1.8531
שיעור חילוט		5.51%
תקופת הבשלה		חודש ו- 6 חודשים
איטרציות		4,200
סה"כ ע"ב מודל Black & Scholes		$914,341,298.00
סה"כ ע"ב המודל הבינומי		$813,997,676.00
סה"כ ע"ב מודל Black & Scholes מתוקנן		$863,961,092.00
ההפרש		-$49,963,416.00

תמונה 36 – ניתוח תוצאות מודל הרשת הבינומי המותאם אישית

Edit Preferences View Run Help

Statistics

Statistic	Value	Precision
Trials	124,900	
Mean	$17.39	$0.01
Median	$17.39	$0.02
Mode	---	
Standard Deviation	$1.50	$0.01
Variance	$2.25	
Skewness	-0.00	
Kurtosis	3.00	
Coeff. of Variability	0.09	
Range Minimum	$10.70	
Range Maximum	$23.96	
Range Width	$13.26	
Mean Std. Error	$0.00	

* Statistics shown in color are tested for $0.01 precision at 99.90% confidence

תמונה 37 – תוצאת הערכת שווי אופציות לעובדים באמצעות סימולציית Monte Carlo

	מחיר מניה שמרני	**מחיר מניה אגרסיבי**	**מחיר מניה ממוצע**	שיעור חילוט	5.51%
				שנה	שיעור הריבית
מחיר מניה	$45.17	$50.70	$47.93	1	1.21%
מחיר מימוש	$45.17	$50.70	$47.93	2	2.19%
משך חיים חוזי	10	10	10	3	3.21%
שיעור ריבית חסרת הסיכון	1.21%	1.21%	1.21%	4	3.85%
תנודתיות	49.91%	49.91%	49.91%	5	4.68%
תשואת דיבידנד	0%	0%	0%	6	4.59%
איטרציות	4200	4200	4200	7	5.11%
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	1.8531	1.8531	1.8531	8	4.91%
תקופת הבשלה	0.08	0.08	0.08	9	5.25%
				10	5.59%

מודל רשת בינומי מותאם אישית	$17.39	(על בסיס מודל בינומי מותאם אשיית עם שערי ריבית משתנים)
מודל Black & Scholes נאיבי	$26.91	(על בסיס מודל Black & Scholes עם הנחה נאיבית של 10 שנים)
מודל Black & Scholes מתוקנן	$19.55	(על בסיס מודל Black & Scholes ומשך חיים צפוי של 4 שנים)
הפחתת העלות	$2.16	

תמונה 38 – תוצאת הערכת שווי האופציות

הדוגמא בתמונה 38 מציגה את תוצאת מודל Black & Scholes הנאיבי של $26.91 מול תוצאת מודל הרשת הבינומי של $17.39 (תוצאת מודל Black & Scholes משתמש במשך חיים מותאם של 4 שנים היא $19.55). ההפרש בגובה $9.52 ניתן להסבר ע״י התרומה בחלקים. במטרה להבין את ערך האופציה הנמוך יותר בהשוואה לתוצאות מודל Black & Scholes הנאיבי, תמונה 39 מתארת את התרומה לירידה בהערכת השווי של האופציות.

ההפרש בין הערכת השווי של מודל Black & Scholes הנאיבי של $26.91 מול הערכת השווי של מודל הרשת הבינומי המותאם אישית של $17.39 הוא 9.52%. תמונה 39 מסבירה מהיכן מגיע ההפרש. בערך 0.02% מההפרש מגיע מתקופת ההבשלה ומשערי ריבית המשתנים לאורך חיי האופציה. 28.60% או $2.64 מגיעים מהתנהגות המימוש הלא אופטימאלית של העובדים, ויתר ה- 71.37% או $6.58 מגיעים משיעור חילוט שנתי של 5.51%. סך הערכת השווי המוסברת באופן ישיר מגיע ל- $9.22. שאר הערכת השווי בגובה של $0.30 מגיע מאינטראקציות לא ליניאריות בין משתני הקלט ואינה מובאת בחשבון באופן ישיר. תמונה 40 מציגה חישוב לדוגמא של ההענקה בינואר 2005.

ניתן לראות בניתוח הערכת השווי ששוויים ההוגן של האופציות לעובדים ניתן להערכת יתר של 6.14% בתמונה 36 ($813.99M באמצעות שימוש במודל הרשת הבינומי מול $863.96M באמצעות שימוש במודל Black & Scholes עם חיים מתואמים) אם משתמשים במולד Black & Scholes הרגיל או הכללי. הסיבה לכך היא שמודל Black & Scholes הכללי לא יכול לקחת בחשבון תנאי מציאות של אופציות לעובדים אשר יכולים להשפיע על ערכן. לחילופין השתמשנו במודל הרשת הבינומי המותאם אישית, המביא בחשבון את כל נתוני הקלט של מודל Black & Scholes הכללי (מחיר מניה, מחיר מימוש, שיעור ריבית חסרת הסיכון, תשואת דיבידנד ותנודתיות) כמו גם תנאי מציאות אחרים כגון תקופות הבשלה, שיעורי חילוט התנהגות מימוש לא אופטימאלית, תאריכי חסימה, שערי ריבית משתנים, תשואות דיבידנד משתנות וסטיות תקן משתנות. תמונה 41 מתארת את ייחוס ההוצאות בעזרת מודל Black & Scholes למשך 6 השנים הבאות, עבור ההענקות המתחילות בינואר 2005. נציין שסך ההוצאות העומד על $914,341,298 זהה לסך תוצאות הערכת השווי בתמונה 36. ההוצאות התקבלו ע״י הקצאת כל הנפקת אופציה לעובדים להענקות קטנות כפי שתואר מקודם.

התרומה להפחתת ערך האופציה

תקופת הבשלה	$0.00	0.02%	מודל רשת בינומי מותאם אישית	$17.39
מכפיל התנהגות מימוש לא אופטימלית	$2.64	28.60%	מודל Black & Scholes נאיבי	$26.91
שיעור חילוט	$6.58	71.37%	חיסכון	**$9.52**
שערי ריבית משתנים	$0.00	0.02%		
סך הערך	**$9.22**			

*ההפרש הזעום בין $9.22 ל- $9.52 נובע מהאינטראקציות בין המשתנים

השונות ביחס למודל Black & Scholes

שימוש במודל Black & Scholes עם הנחה נאיבית שהפקיעה תתרחש בעוד 10 שנים	$26.91	
שימוש במודל Black & Scholes המתוקנן עם משך חיים ממוצע צפוי לאופציה של 4 שנים*	$19.55	
שימוש במודל Black & Scholes המתוקנן עם משך חיים צפוי ושיעור חילוט	$18.47	
שימוש במודל הרשת הבינומי עם שערי ריבית משתנים, שיעור חילוט, מכפיל התנהגות ותקופת הבשלה	$17.39	
הפחתת העלות מתקבלת באמצעות שימוש במודל הבינומי במקום במודל Black & Scholes (משך חיים צפוי)	$2.16	(הפחתה של 11.04%)
ממוצע אופציות מונפקות פר חודש בשנת 2006	550,000	
הפחתת העלות לשנה	$14,240,709	

*הערה: השתמשנו ב- 4 שנים מאחר והאופציות מוענקות במנות חודשיות במשך 48 חודשים

תמונה 39 – התרומה לקיטון בהערכת שווי האופציה

	מחיר מניה **שמרני**	מחיר מניה **אגרסיבי**	מחיר מניה **ממוצע**	
ערך האופציה	$17.39	$19.52	$18.46	(על בסיס מודל בינומי מותאם אשיית עם שערי ריבית משתנים)
מודל Black & Scholes נאיבי	$26.91	$30.20	$28.55	(על בסיס מודל Black & Scholes עם הנחה נאיבית של 10 שנים)
מודל Black & Scholes מתוקנן	$19.55	$21.95	$20.75	(על בסיס מודל Black & Scholes ומשך חיים צפוי של 4 שנים)
הפחתת העלות	$2.16	$2.42	$2.29	
הפחתת העלות לשנה	$14,240,709	$15,984,148	$15,110,852	
*בהנחה שממוצע האופציות המונפקות פר חודש בשנת 2006:			555,000	

תמונה 40 – השוואת הערכת שווי האופציה

סך הוצאות 2005	$103,588,842
סך הוצאות 2006	$304,675,765
סך הוצאות 2007	$300,633,091
סך הוצאות 2008	$141,257,655
סך הוצאות 2009	$54,548,249
סך הוצאות 2010	$9,637,696
סה"כ הוצאות שנתיות	$914,341,298

תמונה 41 – ייחוס ההוצאות (ע"פ מודל Black & Scholes)

תמונה 42, מאידך, מראה את ייחוס ההוצאות בעזרת גישת מודל הרשת הבינומי המותאם אישית. שוב, נציין כי סך ההוצאות של $813,997,676 תואם לתוצאות בתמונה 36. ההפרש בין מודל Black & Scholes הנאיבי לבין גישת מודל הרשת הבינומי המותאם אישית הוא משמעותי לגמרי (תמונה 43). ההפרש בין סך הערכת השווי הוא 12.33% ($813.99M מול $914.34M) ואחוז זה עקבי עם ההוצאות לאורך כל השנים. בכל אופן, ההוצאות הדולריות מרוכזות וסך ההפרש של $100.34M לא יחולק באופן שווה.

סך הוצאות 2005	$92,197,733
סך הוצאות 2006	$271,222,335
סך הוצאות 2007	$267,662,000
סך הוצאות 2008	$125,765,601
סך הוצאות 2009	$48,567,875
סך הוצאות 2010	$8,582,132
סה"כ הוצאות שנתיות	$813,997,676

תמונה 42 – ייחוס ההוצאות (ע"פ מודל הרשת הבינומי המותאם אישית)

	ההפרש ($)	ההפרש (%)
סך הוצאות 2005	-$11,391,109	-12.36%
סך הוצאות 2006	-$33,453,430	-12.33%
סך הוצאות 2007	-$32,971,091	-12.32%
סך הוצאות 2008	-$15,492,054	-12.32%
סך הוצאות 2009	-$5,980,374	-12.31%
סך הוצאות 2010	-$1,055,564	-12.30%
סה"כ הוצאות שנתיות	-$100,343,622	-12.33%

תמונה 43 – ההפרש בדולרים ובאחוזים של ההוצאות

22. מסקנות

עברו 33 שנה מאז פיתחו Fisher Black and Myron Schools את המודל שלהם לתמחור אופציות והתקדמויות משמעותיות נעשו; לכן, לא ניתן להגביל את מחיר האופציה למודל ספציפי אחד (מודל Black & Schools הרגיל/הכללי) בשעה שפלטפורמה של מודלים אחרים ניתנת ליישום. שלוש הגישות העיקריות להערכת אופציות הן גישות של מודלים סגורים (מודל Black & Schools הרגיל, מודל Black & Schools הכללי ומודלים לקירוב עבור אופציה אמריקאית), סימולציית Monte Carlo, ומודלי רשת בינומיים. המאמר מפרט את ההשפעה של מודל הרשת הבינומי המותאם אישית בהתאם לדרישות תקן חשבונאות אמריקאי SFAS**123**R. מודל Black & Schools ומודל Black & Schools הכללי יעריכו יתר על המידה את השווי ההוגן של אופציות לעובדים כאשר ישנה התנהגות מימוש מוקדם לא אופטימאלית המלווה בדרישות הבשלה וחילוטי אופציות. למעשה, חברות המשתמשות במודל Black & Schools ובמודל Black & Schools הכללי להערכת ההוצאות בגין האופציות לעובדים שלהן, מעריכות ביתר את ההוצאה אמיתית שלהן. מודל Black & Schools דורש הנחות בסיס רבות טרם יישומו, וככזה, יש לו מגבלות משמעותיות, כולל היותו ישים אך ורק עבור אופציות אירופאיות על מניות שאינן מחלקות דיבידנד. בנוסף, מודלי קירוב לאופציה אמריקאית מורכבים מאוד וקשים לבנייה בגיליון אלקטרוני. מודל Black & Schools לא לוקח בחשבון אופציות אמריקאיות, אופציות על מניות המחלקות דיבידנד (מודל Black & Schools הכללי, מאידך, יכול להביא בחשבון תשואות דיבידנד באופציות אירופאיות), חילוטים, ביצועי חסר, חסמי מחיר מניה, תקופות הבשלה, סביבה עסקית משתנה, תנודתיות משתנה, התנהגות מימוש מוקדם לא אופטימאלית, ותנאים אחרים. סימולציית Monte Carlo כאשר משתמשים בה לבד הינה גישה נוספת להערכת אופציות, אך היא מוגבלת לאופציות אירופאיות בלבד. ניתן להשתמש בסימולציה בשתי דרכים שונות: על מנת לפתור את השווי ההוגן של האופציה באמצעות סימולציות מסלול של מחירי המניה, או לחילופין בשילוב עם גישות אחרות (למשל עם מודל הרשת הבינומי או עם מודלים סגורים) על מנת "ללכוד" את מקורות אי הוודאות הרבים במודל.

מודלי רשת בינומיים הם גמישים וקלים ליישום. הם מסוגלים להעריך את שוויים ההוגן של אופציות אמריקאיות על מניות המחלקות דיבידנד אך דורשות משאבי מחשב גדולים. יש להשתמש באפליקציות תוכנה על מנת לסייע בחישוב. מודלי רשת בינומיים משמש לחישוב אופציות אמריקאיות על מניות המחלקות דיבידנד וניתן לאמצם בקלות על מנת לפתור אופציות לעובדים עם נתוני קלט אקזוטיים בשילוב עם סימולציית Monte Carlo עבור הנחות הבסיס הלא וודאיות (כגון: הסתברויות לחילוט, התנהגות מימוש לא אופטימאלית, הבשלה, ביצועי חסר וכו') ועל מנת להשיג דיוק גבוה ברווח בר סמך תקף סטטיסטית. בהתבסס על הניתוחים שבמאמר, מומלץ לאסור את השימוש במודל המניח שאופציה לעובדים היא אופציה אירופאית, כשלמעשה היא אופציה אמריקאית עם משתנים אקזוטיים אחרים, כאשר הוא מביא להערכת יתר בולטת וניכרת של ההוצאות בגין האופציות. גורמים רבים משפיעים על שוויים ההוגן של אופציות לעובדים, ועל כן יש להשתמש בגישת מודל הרשת הבינומי להערכת שווי מאחר והיא זו המביאה בחשבון את הגורמים הללו. בעת ביצוע בדיקות נאותות (Due Diligence), אופציות לעובדים עם תנאי מציאות ניתנות להערכת שווי באופן אבסולוטי באמצעות גישת מודל הרשת הבינומי כמוצג במאמר, כאשר המתודולוגיה שבה השתמשנו היא מעשית, מדויקת ונכונה מבחינה תיאורטית.

23. ביבליוגרפיה

Aucamp, D. C. and W. L. Eckardt, Jr. “An Intuitive Look at Itô’s Lemma: A Pedagogical Note.” *Financial Review* 16 (Spring, 1981), 41-50.

Bachelier, L. “Theory of Speculation.” English translation by A. J. Boness, *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. P. Cootner. Cambridge, Mass: The M.I.T. Press (1964), 17-78.

Baxter, M. and A. Rennie. *Financial Calculus.* Cambridge: Cambridge University Press (1996), Ch. 3.

Black, F. and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (May-June, 1973), 637-659.

Black, F. and J. Cox. Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions. *The Journal of Finance* 31 (May, 1976), 351-368.

Boyle, Phelim P. “Options: A Monte Carlo Approach.” *Journal of Financial Economics* 4 (May, 1977), 323-338.

Boyle, P., M. Broadie, and P. Glasserman. “Monte Carlo Methods for Security Pricing.” *Monte Carlo Methods for Security Pricing* 21 (1997), 1267-1321.

Briys, E., M. Bellalah, H. M. Mai, F. de Varenne. *Options, Futures and Exotic Derivatives*. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons (1998), Chs. 2.

Chance, D. M. “The ABCs of Geometric Brownian Motion.” *Derivatives Quarterly* 1 (Winter, 1994), 41-47.

Cox, D. R. and H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes.* London: Chapman & Hall (1965), Chs. 1, 2, 5.

Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein. “Option Pricing: A Simplified Approach.” *Journal of Financial Economics* 7 (September, 1979), 229-263.

Carpenter, J. 1998. “The Exercise and Valuation of Executive Stock Options,” *Journal of Financial Economics*, vol. 48, no. 2 (May): 127-58.

Dothan, M. U. *Prices in Financial Markets*. New York: Oxford University Press (1990), Chs. 7,8.

Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd. ed. Princeton: Princeton University Press (1996), Ch. 5.

Duffie, D. *Security Markets: Stochastic Models*. Boston: Academic Press (1988), Chs. 21-23.

Dupire, B. *Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management*. London: Risk Books (1998).

Financial Accounting Standards Board. 1995. *FASB 123: Accounting for Stock-Based Compensation.*

Galai, D. and R. W. Masulis. The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock. *Journal of Financial Economics* 3 (January-March, 1976), 53-81.

Galai D. and M. Schneller. 1978. "Pricing Warrants and the Value of the Firm" *Journal of Finance*, vol. 33, no. 5 (December): 1333-42.

Geske, R. The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12 (November, 1977), 541-552.

Harrison, M. and D. Kreps. "Martingales and Multiperiod Securities Markets." *Journal of Economic Theory*, 20 (July, 1979), 381-408.

Harrison, M. and S. Pliska. "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and Their Applications* 11 (1981), 261-271.

Huddart S. and M. Lang. 1996. "Employee Stock Option Exercises: An Empirical Analysis," *Journal of Accounting and Economics*, vol.21, no. 1 (February): 5-43.

Hull, J. C. *Options, Futures and Other Derivative*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall (2003), Ch. 11.

Ingersoll, J. E. *Theory of Financial Decision Making*. Totowa, NJ: Rowman & Littlefield (1987), Ch. 16.

Jarrow. R. A. and S. M. Turnbull. *Derivative Securities* Cincinnati: South-Western Publishing (1996), Chs. 5, 6.

Jarrow, R. and A. Rudd. *Option Pricing*. Homewood, Illinois: Irwin (1983), Ch. 7.

Karatzas, I. and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd. ed. New York: Springer-Verlag (1991), Chs. 3, 5.

Karatzas, I. and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer-Verlag (1988), Ch. 2.

Karlin, S. and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press (1975), Ch. 7.

Karlin, S. *A Second Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press (1981), Ch. 15.

Lee. C. J. The Pricing of Corporate Debt: A Note. *The Journal of Finance* 36 (December, 1981), 1187-1189.

Lehoczky, J. P. "Simulation Methods for Option Pricing," Chapter 26 in *Mathematics of Derivative Securities*, ed. M. A. H. Dempster and S. Pliska. Cambridge: Cambridge University Press (1997).

Maiocchi, R. "The Case of Brownian Motion." *British Journal of the History of Science* 23 (1990), 257-283.

Malliaris, A. G. and W. A. Brock. *Stochastic Methods in Economics and Finance*. New York: North Holland Publishing Co. (1983), Ch. 2.

Merton, R. C. “On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models.” *Financial Economics: Essays in Honor of Paul Cootner*, ed. by W. F. Sharpe and C. M. Cootner. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1982).

Merton, R. C. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance* 29 (May, 1974), pp. 449-470.

Neftci, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego: Academic Press (2000), Chs. 6,8

Neftci, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego: Academic Press (1996), Chs. 1, 14, 15.

Newton, N. J. “Continuous-Time Monte Carlo Methods for Variance Reduction,” in *Numerical Methods in Finance*, ed. L. C. G. Rogers and D. Talay. Cambridge: Cambridge University Press (1997).

Nielsen, L. T. *Pricing and Hedging of Derivative Securities*. Oxford: Oxford University Press (1999), Chs. 1-3.

Osborne, M. F. M. “Brownian Motion in the Stock Market.” *Operations Research* 7 (March-April, 1959), 145-173.

Rendleman, R. and B. Bartter. “Two State Option Pricing.” *The Journal of Finance* 34 (December, 1979), 1092-1110.

Resnick, S. I. *Adventures in Stochastic Processes*. Boston: Birkhauser (1992), Ch. 6.

The first and classic applications of Brownian motion in finance were

Rubinstein M. 1985. “On the Accounting Valuation of Employee Stock Options”, *Journal of Derivatives*, vol. 3, no. 1 (Fall): 8-24.

Shimko, D. C. *Finance in Continuous Time*. Miami: Kolb Publishing (1992), Ch. 1.

Smith, C. W. “Appendix: An Introduction to Stochastic Calculus.” *The Modern Theory of Corporate Finance*, ed. by M. C. Jensen and C. W. Smith. New York: McGraw-Hill (1984).

Sullivan, E. J. and T. M. Weithers. “Louis Bachelier: The Father of Modern Option Pricing Theory.” *Journal of Economic Education* 22 (Spring, 1991), 165-170.

Wilmott, P., S. Howison, and J. DeWynne. *The Mathematics of Financial Derivatives.* Cambridge: Cambridge University Press (1995), Ch. 2.

נספח א - תהליכים סטוכסטיים

תהליך סטוכסטי היא משוואה המוגדרת באופן מתמטי כך שתוכל ליצור סדרה של תוצאות לאורך זמן, תוצאות אשר אינן בעלות אופי דטרמיניסטי. לאמור- משוואה או תהליך אשר לא עוקב כלל פשוט הניתן להבחנה (discernible) כמו למשל המחיר יעלה ב- X אחוז בכל שנה או ההכנסות יעלו ב- X ועוד Y אחוז. תהליך סטוכסטי בהגדרתו הוא אינו מוחלט (non-deterministic), וניתן להכניס מספרים מוגדרים מראש לתוך משוואה של תהליך סטוכסטי ולקבל תוצאות שונות בכל פעם. לדוגמא, המסלול של מחירי מניה הוא סטוכסטי באופיו, ולא ניתן לחזות בצורה מהימנה את מסלול מחירי המניה בוודאות כלשהי (אפילו עם סט מוגדר מראש של נתוני קלט כגון שיעור צמיחה ספציפי או תנודתיות). בכל אופן, התפתחות המחירים לאורך זמן מגולמת בתהליך המייצר את המחירים הללו. התהליך הוא קבוע ומוגדר מראש, אולם התוצאות אינן. לכן, באמצעות סימולציה סטוכסטית, אנו יוצרים נתיבים רבים (multiple pathways) של מחירים, במטרה לקבל מדגם סטטיסטי של הסימולציות הללו, ומסיקים לגבי הנתיבים הפוטנציאליים של המחיר הממשי בהינתן אופיו והפרמטרים של התהליך הסטוכסטי המשמש ליצירת סדרות עתיות (time-series). תהליך "גיאומטרי בראוני" (Geometric Brownian Motion), אשר הינו התהליך הנפוץ והמקובל ביותר הנמצא בשימוש אודות לפשטותו ולמגוון הרחב של האפליקציות האפשריות הנגזרות ממנו, הוא תהליך סטוכסטי השימושי לחיזוי מחירי מניות והוא הנחת הבסיס המשמשת במודלים הבינומיים התרינומיים וכן במודל Black & Schools.

סיכום המאפיינים המתמטיים של תהליך "גיאומטרי בראוני"

נניח תהליך X , כאשר $X = [X_t : t \geq 0]$ אם ורק אם X_t רציף, כאשר נקודת הפתיחה היא $X_0 = 0$, כאשר X מתפלג נורמאלי עם תוחלת אפס ושונות של אחד או $X \in N(0,1)$, וכאשר כל תוספת בזמן תלויה בתוספת הקודמת ובעצמה מתפלגת נורמאלית עם תוחלת אפס ושונות של t, כך ש $X_{1+a} - X_t \in N(0,1)$. אז, התהליך $dX = \alpha X dt + \sigma X dZ$ עוקב תהליך "גיאומטרי בראוני" (GBM), כאשר α הוא פרמטר סחף/מגמה (drift), σ מדד התנודתיות, $dZ = \varepsilon_t \sqrt{\Delta dt}$ כך ש- $\ln\left[\frac{dX}{X}\right] \in N(\mu, \sigma)$ או X ו- dX מתפלגים נורמלית. אם בזמן אפס, $X(0) = 0$ או אז הערך הצפוי של התהליך X בכל זמן t הוא $E[X(t)]X_0 e^{\alpha t} = 0$ והשונות של התהליך X בכל זמן t היא $V[X(t)]X_0 e^{2\alpha t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) = 0$. במקרה הרציף כאשר ישנו פרמטר סחף/מגמה α, הערך הצפוי הופך ל- $E\left[\int_0^\infty X(t) e^{-rt} dt\right] = \int_0^\infty X_0 e^{-(r-\alpha)t} dt = X_0 / (r-\alpha)$.

נספח ב – Geometric Brownian Motion

אחת מאבני היסוד של תורת המימון היא הנחה פונדמנטלית (שאינה נתונה לשינוי) שקובעת שלשערים הנוכחיים בשוק "אין זיכרון" (Memoryless) ואין הם יכולים לפיכך להיות מושפעים משערי עבר. משמע, העבר אינו מלמד דבר על העתיד. זוהי הנחת בסיס למשל, במודל Black & Schools לתמחור אופציות. בהנחה וטענה זו נכונה, הרי שלא ניתן לדעת אם מדד המעו"ף מחר, או בעוד שבוע או בעוד חודש או בזמן כלשהו בעתיד יהיה גבוה יותר או נמוך יותר מהשער הנוכחי של מדד המעו"ף, אותו שער הנקרא שער ה"ספוט".

למעשה, ההנחה היא כי קיימת הסתברות של 50% שמדד המעו"ף בעוד זמן t מהיום יהיה גבוה יותר משער הספוט הנוכחי ובאותה מידה בהסתברות של 50% שמדד המעו"ף בעוד זמן t מהיום יהיה נמוך יותר משער הספוט הנוכחי. למעשה זוהי הנחה הזהה לזו של הטלת מטבע, "עץ" או "פאלי". כמובן שיש לכאורה טיעון נוסף שאותו ניתן לטעון והוא שמדד המעו"ף יהיה בדיוק באותו מקום בעוד זמן t אך אנו נתעלם מטיעון זה ונחזק את התעלמותנו בהנחה נוספת של תורת המימון שקרויה Geometric Brownian Motion (GBM). GBM הינה הנחה תועלתנית ששערים הינם בעלי תנודתיות מתמדת שמורכבת משינויים אקראיים ("הילוך מקרי" Random walk), בתוספת "סחף" (Drift), משמע, שערים של מדדים, מטבעות, מניות או נפט אינם נשארים אף פעם במקום אלא הם נעים ונדים כל הזמן.

כעת, אנו מניחים שהעתיד במדד המעו"ף הוא הטלת מטבע עץ או פאלי. בעיה מרכזית בטיעון זה קשורה לפרמטר אמפירי חשוב ביותר וידוע מאוד שהתנהגות השערים על פני זמן במדד המעו"ף או ברוב מדדי שוק (אינדקס) אחרים הינה בצורת התפלגות לוג נורמאלית (נניח בצורת פעמון). כמובן שתופעה זו מסבכת את הבעיה מכיוון שהיא מניחה הסתברויות שונות "ליפול" על כל שער שהוא, כאשר ההסתברויות הצפופות ביותר מרוכזות באזור המרכז, שהינו בד"כ שער הספוט (בהנחה שההתפלגות הינה סימטרית ולצערנו ההתפלגויות הנורמאליות בשווקים פעמים רבות אינן סימטריות).

כעת נעבור ליישום של GBM. נתחיל עם סימולציית Monte Carlo בסיסית עבור מניות. Hull (2003) מציין תהליך פופולארי ושכיח למידול תשואות של מניות או מחירי מניות, הלא הוא GBM. על כן, סימולציית Monte Carlo הינה יישום פשוט של GBM. על מנת לראות כיצד התהליך מתבצע נציג נוסחה מתוך ספרו של המלומד ה"ה פרופ' John Hull:

$$\ln\left({S_t}/{S_{t-1}} \right) \approx \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T , \sigma\sqrt{T} \right]$$

הנוסחה המונחת לעיל מתארת את GBM. בצד שמאל של המשוואה מצוי הלוגריתם הטבעי של המחיר של היום מחולק במחיר של אתמול. ניתן לראות שמדובר בתקופה יומית. למעשה לוקחים את הלוגריתם הטבעי של מחיר בזמן t מחולק במחיר בזמן t-1. במילים אחרות, זוהי התשואה התקופתית בחישוב רציף של המניה. למעשה אנו אומרים שהתשואה התקופתית בתדירות חישוב רציף $\ln\left({S_t}/{S_{t-1}}\right)$ מתפלגת בקירוב $\Phi \approx$ עם תוחלת של סחף (drift) μ בניכוי מחצית מהשונות $\frac{\sigma^2}{2}$ לאורך זמן T ועם התנודתיות המחושבת כמכפלה של סטיית התקן σ בשורש הריבועי של הזמן $\sqrt{T}$. הסיבה לכך שסטיית התקן מוכפלת בשורש הריבועי של הזמן ולא בזמן עצמו נעוצה בחוק השורש הריבועי אשר לפיו סטיית התקן נמדדת במונחי שורש ריבועי של הזמן.

אז יש לנו תשואה תקופתית על בסיס רציף שבקירוב מתפלגת נורמלית. הסיבה לכך שאנו אומרים שרמת המחירים מתפלגת לוג נורמלית, הינה מאחר והלוגריתמים הטבעיים של התשואות מתפלגים נורמלית. בהינתן שהלוגריתם הטבעי מתפלג נורמאלית ניתן לומר שרמת המחירים או יחס המחירים מתפלג לוג נורמלית. מכאן ניתן לראות ש-GBM הוא למעשה תהליך דיפוזיה לוג נורמאלי.

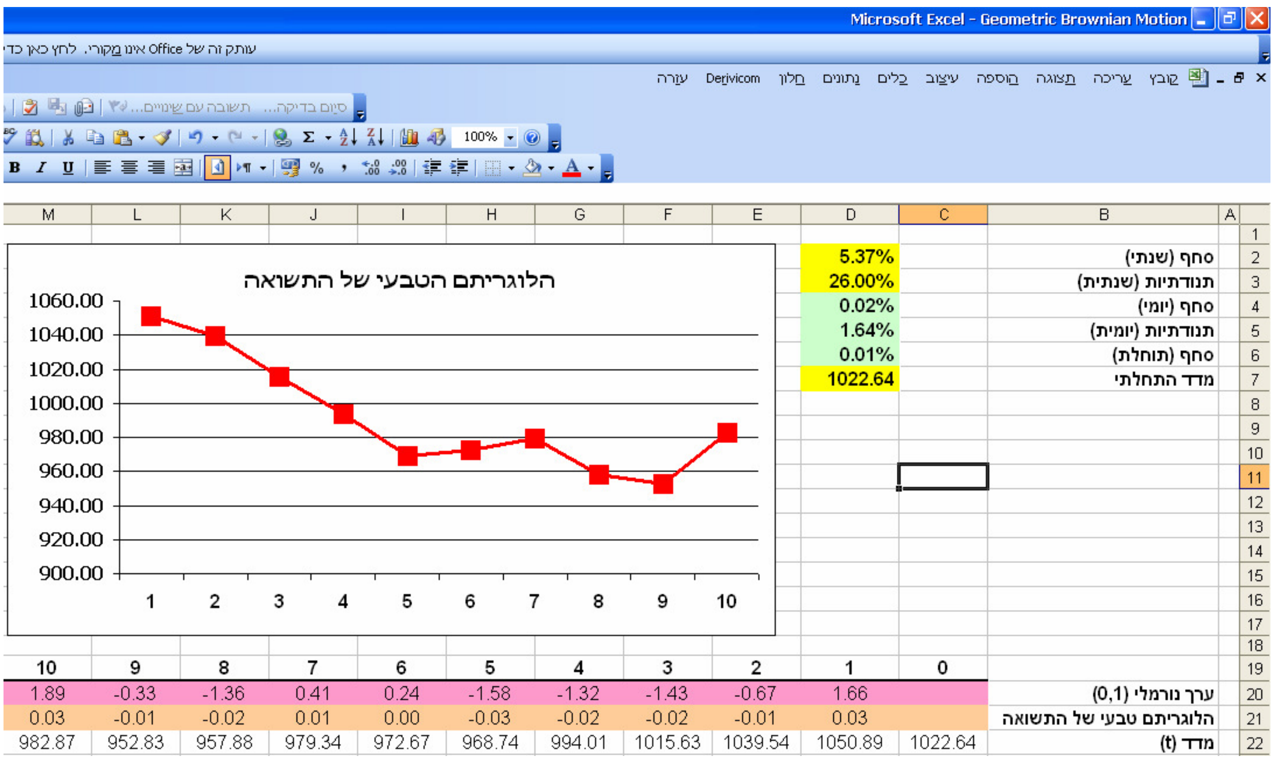
הנוסחה הבאה שנציג הינה אקוויוולנט פשוט יותר לנוסחה המצוינת לעיל. נשתמש בנוסחה זו לבניית מודל להתנהגות מחירי המניה.

$$\ln\left({S_t}/{S_{t-1}}\right) = \alpha + z_t\sigma$$

כמו בנוסחה הקודמת כך גם בנוסחה הנ"ל בצד שמאל יש לנו את התשואה התקופתית, קרי הלוגריתם הטבעי של המחיר היום חלקי המחיר אתמול $\ln\left({S_t}/{S_{t-1}}\right)$ שווה לשני רכיבים: רכיב דטרמיניסטי α ורכיב סטוכסטי $z_t\sigma$. הרכיב הדטרמיניסטי הוא הסחף המוזכר לעיל. כלומר, אנו מצפים שמחיר המניה יסחף כלפי מעלה ועל ידי כך נקבל תשואה צפויה חיובית כלשהי לאורך זמן וזהו אותו חלק קבוע. אולם יש לנו גם זעזוע אקראי (Random shock) שהוא פונקציה של מכפלת התנודתיות σ ב- z_t שהוא הרי משתנה אקראי. למעשה ברגע שהכפלנו את התנודתיות במשתנה האקראי הפכנו את מודל התנהגות מחירי המניה לתהליך סטוכסטי.

כעת נעבור ליישום בגיליון האלקטרוני (Excel). נפתח גיליון חדש וננסה למדל את מניה כלשהי באמצעות GBM. תחילה עלינו להניח שלוש הנחות (המסומנות בצהוב בתרשים). ההנחה הראשונה היא לגבי הסחף השנתי או התשואה השנתית הצפויה של המניה. על פי נתוני אתר Yahoo תשואות המניה לשנים 2001, 2002, 2003, 2004 ו-2005 הם 22.6%, 33.2%, 12.5%, 31.4% ומינוס 46.2%, בהתאמה. הממוצע הגיאומטרי של חמשת התשואות עומד על 5.37%. ההנחה השנייה היא לגבי התנודתיות השנתית של המניה. על פי נתוני Yahoo סטיית התקן ההיסטורית של המניה עומדת על 26%. ההנחה השלישית היא ששער המניה מתחיל ב- 1022.64 נקודות.

כעת עלינו לבצע כמה המרות. תחילה נמיר את הסחף השנתי לסחף יומי בכך שפשוט נחלק את הסחף השנתי ב- 252 (בהנחה שיש 252 ימי מסחר בשנה) וכך בעצם המרנו את הסחף השנתי לסחף יומי. נבצע אותה פעולה עבור התנודתיות בכך שנחלק את התנודתיות בשורש ריבועי של 252 - יש לזכור שעל פי חוק השורש הריבועי התנודתיות נמדדת בשורש הריבועי של הזמן ולא בזמן עצמו. כעת כל מה שנותר לנו הוא להמיר את הסחף היומי לסחף היומי <u>הצפוי</u> בכך שנפחית מהראשון מחצית מהשונות היומית (נזכיר ששונות היא התנודתיות בריבוע). במילים אחרות, הסחף היומי הצפוי סובל ממשיכות לכיוונים שונים מעצם היותו פונקציה של השונות.



למעשה, קיבלנו את שני הדברים שבאמת אנו צריכים על מנת למדל GBM, הלא הם הסחף היומי והתנודתיות היומית. כעת נמדל אותם עבור כל יום. בתרשים ניתן לראות טור לכל יום. טור C להיום, טור D למחר, טור E למחרתיים וכך הלאה. התמונה למטה מציגה את התנהגות המניה בכל יום ויום לאורך 10 ימים (בכל פעם שנלחץ על מקש "F9" נקבל גרף חדש). אם נסתכל על היום הראשון, אזי הדבר הראשון שנרצה לעשות הוא לחשב את ה- z_t האקראי. בתא D20 נכתוב "=NORMSINV(RAND())", מדובר בפונקציה שפוגשים הרבה במימון כמותי. פונקצית ה- RAND() נותנת לנו את ההסתברות בין 0 ל-1 ופונקצית ה- NORMSINV מחזירה את ההופכי להתפלגות הנורמאלית המצטברת הסטנדרטית, כאשר להתפלגות סטנדרטית יש ממוצע אפס, וסטיית תקן של 1). דהיינו נקבל ערך בין מינוס 3 לפלוס 3. הרציונאל הוא שאנו הופכים את התנודתיות לאקראית ואז ניתן ליישם את הנוסחה שלעיל עבור GBM.

בתא D21 נכתוב "=drift+vol*z". כלומר, המדד יהיה פונקציה של drift (הסחף היומי הצפוי) בתוספת המכפלה של vol (התנודתיות היומית) ב- z_t האקראי (ערך נורמאלי (0,1) שכרגע חושב בתא D20 (אם היינו מסתפקים רק בסחף היומי הצפוי היינו מקבלים גרף עם שיפוע חיובי). המכפלה המתוארת גורמת לתנודתיות להיות אקראית, כלומר סחף קבוע בתוספת זעזוע אקראי כפונקציה של התנודתיות – מה שנותן לנו את הלוגריתם הטבעי של התשואה.

בתא D22 אנו מכפילים את המדד היום 1022.64 נקודות ב- e בחזקת התשואה או בפונקציה המעריכית של התשואה. זה נותן לנו את המדד מחר.

ביום למחרת בתא E22 נעשה את אותו הדבר. נחשב את הלוגריתם הטבעי של התשואה, ניקח את המחיר של היום הקודם ונכפול אותו בפונקציה המעריכית של הלוגריתם הטבעי של התשואה. בדרך זו אנו מקבלים בכל יום מחיר חדש שהוא פונקציה של המחיר ביום הקודם והוא אקראי מכיוון שיש לנו את המשתנים האקראיים בשורה 20, שמשתנים כל הזמן. כאשר נקיש על מקש F9 כל פעם על מנת לחשב מחדש, נקבל סדרה חדשה המבוססת על GBM עבור מודל מחירי המניה. למעשה זו היא סימולציית Monte Carlo.

לסיכום, גישת התרחישים של Monte Carlo מניחה התפלגות מסוימת. בגישה זו מגרילים תרחישים רבים באמצעות לוח מספרים מקריים הבנוי על אותה התפלגות. מהתרחישים גוזרים רווחים והפסדים על התיק הקיים ובוחנים את הערכים הקיצוניים של ערך התיק בדומה לגישת התרחישים ההיסטוריים. יתרונות הגישה באים לדי ביטוי בכך שהיא מתאימה לטיפול בסיכונים נוספים וכן למכשירים מורכבים, מאפשרת ביצוע ניתוחי רגישות בקלות. חסרונותיה הם שהיא דורשת משאבי מחשב גדולים, קיימים בה סיכון מודל ושהיא גישה מורכבת להסבר. ניתן לומר שגישה זו מתאימה לתיק מורכב כשהגורמים והפרמטרים המשפיעים על תשואות הנכסים בתיק ידועים.

נספח ג – נוסחאות לתמחור אופציות

מודל האופציות של Black & Schools (אופציות אירופאיות)

זהו מודל Black & Schools ללא תשלומי דיבידנד, של זוכי פרס הנובל המפורסמים. כאמור, זוהי הגרסה האירופאית, כאשר האופציה ניתנת למימוש בפקיעה ולא לפני כן. למרות שהוא מספיק פשוט לשימוש, יש לשים לב להנחות משתני הקלט שלו, במיוחד להנחה בדבר התנודתיות, אשר בדרך כלל קשה לאמידה. בכל אופן, מודל Black & Schools שימושי כביצירת אומדנים לבדיקת סבירות השווי ההוגן (FMV- Fair Market Value) האמיתי של כתבי אופציות לעובדים (ESO- Employee Stock Options), במיוחד עבור סוגי יותר גנריים של אופציות Call ואופציות Put. עבור הערכות שווי כלכלי של כתבי אופציות לעובדים מורכבים יותר, נדרשים מודלים בינומיים, כמו למשל המודל הבינומי מסוג Flexible Lattice Exercise Behavior.

הגדרת המשתנים

S מחיר המניה ביום ההענקה (₪)

X מחיר המימוש החוזי (₪)

r שיעור הריבית חסרת הסיכון (%)

T הזמן לפקיעה (שנים)

σ התנודתיות השנתית (%)

Φ ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת

החישוב:

$$Call = S\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Xe^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$Put = Xe^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - S\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

מודל Black & Schools הכללי

זהו תקנון של מודל Black & Schools כך שיכלול את תשואת הדיבידנד. מודל Black & Schools הכללי משמש רק להערכת שווי אופציות Call ו- Put אירופאיות.

הגדרת המשתנים

S מחיר המניה ביום ההענקה (₪)

X מחיר המימוש החוזי (₪)

r שיעור הריבית חסרת הסיכון (%)

T הזמן לפקיעה (שנים)

σ התנודתיות השנתית (%)

Φ ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית המצטברת

b עלות נשיאה (%)

q תשלום דיבידנד רציף (%)

החישוב:

$$Call = Se^{(b-r)T}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(b+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Xe^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(b-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$Put = Xe^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(b-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Se^{(b-r)T}\Phi\left(\frac{\ln(S/X)+(b+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

כאשר:

$b=0$ מדובר במודל לאופציות על חוזים עתידיים מסוג Futures

$b=r-q$ מדובר במודל Black & Schools עם תשלום דיבידנד

$b=r$ מדובר בנוסחת Black & Schools פשוטה

$b=r-r^*$ מדובר במודל לאופציות על מטבע חוץ

המודל הבינומי של Cox, Ross & Rubinstein (C-R-R)

המודל הבינומי הוא תיאור דיסקרטי (בדיד) של תהליך "גיאומטרי בראוני" (geometric Brownian motion), המשמש לעיתים קרובות לתיאור התנהגות של נכס. המבנה הוא של עץ כאשר הנכס S יכול נוע למעלה או למטה.

הגדרת המשתנים

u גורם העלייה

d גורם הירידה

σ התנודתיות

Y תשואת נכס הבסיס, עבור מניות $Y = r - q$ (שיעור הריבית פחות תשואת הדיבידנד), עבור חוזים עתידיים מסוג Futures $Y = 0$ ועבור מטבעו $Y = r - r^*$ (שיעור הריבית המקומית פחות שיעור הריבית הזרה).

t תקופת זמן

S הערך הנוכחי של הנכס

S_u ערך הנכס לאחר תנועה כלפי מעלה

S_d ערך הנכס לאחר תנועה כלפי מטה

$p_u = P\left(\frac{S_u}{S}\right)$ ההסתברות לתנועה כלפי מעלה

$p_d = P\left(\frac{S_d}{S}\right)$ ההסתברות לתנועה כלפי מטה

החישוב:

$$u = e^{\sigma\sqrt{t}}$$
$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{t}}$$
$$S_u = S \cdot u$$
$$S_d = S \cdot d$$
$$p_u = \frac{e^{Yt} - d}{u - d}$$
$$p_d = 1 - p_u$$

מודל Monte Carlo (באמצעות תהליך "גיאומטרי בראוני")

משוואת מודל Monte Carlo היא הפתרון המדויק למשוואה הדיפרנציאלית הסטוכסטית של תהליך "גיאומטרי בראוני".

הגדרת המשתנים

S_0 הערך ההתחלתי של תהליך "גיאומטרי בראוני" כאשר $t = 0$

S_t הערך של תהליך "גיאומטרי בראוני" בזמן t

μ גורם הסחיפה (drift)

σ התנודתיות

$N_{0,1}$ מדגם אקראי מתוך התפלגות נורמאלית (Gaussian) עם תוחלת של 0 וסטיית תקן של 1.

החישוב:

$$S_t \approx S\exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma\sqrt{t}N_{0,1}\right)$$

נספח ד – סימולציית Monte Carlo

סימולציה הינה תהליך בו נוצרים מספרים אקראיים בהתאם להסתברויות הקשורות למקור של אי הוודאות, למשל, מכירות של מוצר חדש או דוגמאות שקצת יותר מתאימות לנושא המאמר, מחירי מניות, שערי ריבית, שערי חליפין ומחירי סחורות. התוצאות המתקבלות מההגרלות האקראיות הללו מנותחות על מנת לקבוע את התוצאות הסבירות והסיכון הקשור. לעיתים קרובות השיטה הנ״ל נקראת סימולציית Monte Carlo, על שם העיר מונטה-קרלו הידועה בבתי הקזינו שלה.

ההקבלה להימורים איננה במקומה, סימולציית MC הינה שיטה לגיטימית הנמצאת בשימוש נרחב. השיטה עוסקת באי הוודאות השוררת באספקטים רבים של פעילויות עסקיות. באשר למטרת מאמר זה, השיטה הוכחה כשיטה מדויקת לתמחור אופציות ושימושית במיוחד עבור אופציות תלויות מסלול ואופציות אשר לא קיימת נוסחה כלשהי בעבורן.

על מנת להקל על הבנת הטכניקה, נראה כיצד ניתן להשתמש בסימולציית MC לתמחור אופציות אירופאיות סטנדרטיות. מראש נאמר כי ברור לנו, שמודל Black & Schools הינו המודל הנכון לתמחור אופציות מהסוג הנ״ל ועל כן אין ממש צורך בסימולציות MC. אולם, לדעתי יהיה זה שימושי ביותר לערוך את הניסוי הנ״ל מכיוון והוא מציג את רמת הדיוק של הטכניקה בעבור אופציה פשוטה אשר את מחירה המדויק קל להשיג מתוך נוסחה קיימת.

<u>גישת הקירוב</u>

בעולם מנוטרל סיכון התהליך שמקיים מחיר המניה הוא:

$$dS = \hat{\mu} S \ dt + \sigma S \ dz$$

אנו יכולים לדמות מסלול של מניה ע״י בחירת תקופות זמן באורך של Δt ושימוש בגרסה דיסקרטית של:

$$\Delta S = \hat{\mu} S \ \Delta t + \sigma S \ \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

ההנחות של מודל Black & Schools מניחות כי בעבור מחיר מניה נתון בזמן t, ניתן ליצור שינויים מלאכותיים במחיר המניה בזמן עתידי $t + \Delta t$ באמצעות הנוסחה המצוינת לעיל, כאשר: S הינו מחיר המניה הנוכחי, ΔS הוא השינוי במחיר המניה, μ הוא שיעור הריבית חסרת הסיכון במונחים שנתיים מחושבת באופן רציף, σ הינה התנודתיות של המניה ו- Δt הינו אורך מרווח הזמן אשר במהלכו מתרחש השינוי במחיר המניה. המשתנה המקרי ε הוא דגימה אקראית מ $\phi(0,1)$, קרי מספר אקראי הנוצר מתוך פונקצית ההסתברות של התפלגות נורמאלית

סטנדרטית. נציין כי למשתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי תוחלת של 0, סטיית תקן של 1.0 והתרחשות בעלת תדירות התואמת לעקום בצורת פעמון גאוס.

למען האמת, קל מאוד ליצור מחירי מניות עתידיים לפי הנוסחה המונחת לעיל. דרך פשוטה אחת להשיג דגימה מ- $\phi(0,1)$ היא ליצור 12 מספרים אקראיים בין 0.0 ו- 1.0, לקחת את הסכום, ולהפחית 6.0. במילים אחרות, ניתן לקבל קירוב למשתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי באמצעות הפונקציה ()RAND בגיליון אלקטרוני (תוכנת Excel). הפונקציה ()RAND מייצרת מספר אקראי בין 0 ל- 1, לאמור- היא יוצרת מספרים בין 0 ל- 1 בהסתברות שווה. קירוב טוב עבור משתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי ניתן לקבל בגיליון האלקטרוני באמצעות הנוסחה:
"= RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() + RAND() - 6.0", או לחילופין 12 מספרים אקראיים אחידים פחות 6.0.[49] כמו כן, בגיליון האלקטרוני ניתן להיכנס ל"כלים" ← "Data Analysis" ← "Random Number Generator".

לאחר שיצרנו משתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי אחד, ניתן בנקל להציבו בצד הימני של המשוואה עבור ΔS. הפעולה הנ"ל נותנת לנו את השינוי במחיר במשך חיי האופציה, אשר מתווסף למחיר המניה הנוכחי על מנת שנקבל את מחיר הנכס בפקיעה. כעת נחשב את מחיר האופציה בפקיעה לפי הנוסחאות הסטנדרטיות, $Max(0,S_T - X)$ עבור אופציית Call או $Max(0,X - S_T)$ עבור אופציית Put, כאשר X הוא מחיר המימוש ו- S_T הינו מחיר הנכס בפקיעה. התהליך הנ"ל מפיק לנו ערך של אופציה אחת בעת הפקיעה. על כן, שומה עלינו לחזור על התהליך הנ"ל כמה אלפי פעמים, לקחת את הערך הממוצע של אופציית ה- Call בפקיעה ולהוון את הערך הנ"ל בשיעור הריבית חסרת הסיכון. חלק ממשתמשי השיטה נוהגים לחשב גם את סטיית התקן של מחירי ה- Call, על מנת לקבל תחושה כלשהי לגבי הטעות האפשרית באמידת המחיר.

בואו נתמחר אופציית Call. שער נכס הבסיס עומד על 164, מחיר המימוש הוא 165, שיעור הריבית חסרת הסיכון הוא 5.21%, התנודתיות היא 29% והזמן עד לפקיעה הוא 0.0959 שנים. הכנסת המשוואה המצוינת לעיל בעבור משתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי בכל תא בגיליון אלקטרוני של Excel מייצרת משתנה אקראי. נניח שהמספר הוא 0.733449. הכנסת המספר הנ"ל לתוך המשוואה עבור ΔS תיתן לנו:

$$164 \cdot (0.0521) \cdot (0.0959) + 164 \cdot (0.29) \cdot (0.733449) \cdot \sqrt{0.0959} = 11.62$$

קרי, הערך המלאכותי של המניה בפקיעה הוא 175.62 = 11.62 + 164. עבור המחיר הנ"ל, האופציה בפקיעה תהיה שווה $Max(175.62 - 165,0) = 10.62$. נגריל מספר אקראי נוסף. נניח שקיבלנו 0.18985-.

[49] הקירוב הנ"ל מבוסס על העובדה שההתפלגות סכומם של שתיים עשרה מספרים אקראיים המתפלגים באופן אחיד בין 0 ו- 1 תהיה בעלת תוחלת של שש וסטיית תקן של 1. באמצעות הפחתת 6.0, אנו מתאימים את התוחלת לאפס מבלי לשנות את סטיית התקן. מבחינה טכנית אנו לא מקבלים התפלגות נורמאלית אלא התפלגות סימטרית עם תוחלת אפס וסטיית תקן של 1.0, אשר אלו הן שלוש תכונות השייכות להתפלגות הנורמאלית. התהליך הנ"ל מקובל כקירוב מהיר הגיוני וסביר אך יכול שלא יעבור את המבחנים התובעניים ביותר של הנורמאליות. מאידך גיסא, מחוללי מספרים אקראיים אחרים לא יעברו את המבחנים התובעניים גם כן. אם ניצור מספר גדול מספיק של הגרלות אקראיות, ההליך יתכנס באופן משביע רצון למודל Black & Schools, דבר שמביא לאמון רב בהליך עצמו.

הכנסת המספר הנ"ל לתוך המשוואה עבור ΔS תיתן לנו:

$$164 \cdot (0.0521) \cdot (0.0959) + 164 \cdot (0.29) \cdot (-0.18985) \cdot \sqrt{0.0959} = -1.98$$

דהיינו, קיבלנו שמחיר המניה בפקיעה הוא 162.02 = 1.98 – 164, מה שמוביל לכך שמחיר האופציה הינו Max(162.02 - 165,0) = 0. אנו נחזור על התהליך הנ"ל כמה אלפי פעמים, ולאחר מכן ניקח את ממוצע ערכי האופציה המלאכותיים ונהוון את הממוצע הנ"ל באמצעות נוסחת הערך הנוכחי $e^{-0.0521 \cdot (0.0959)}$.

באופן טבעי כל סימולציה שונה מקודמתה מאחר וכל קבוצת מספרים אקראיים היא שונה. תהליך MC שהרצנו בתוכנת Excel הפיק לנו את הערכים הבאים עבור אופציית ה- Call הנ"ל, שמחירה לפי נוסחת Black & Schools הוא 5.79, כאשר מספר ההגרלות האקראיות שווה לגודל המדגם, n.

n	מחיר אופציית Call
1,000	5.58
10,000	5.51
50,000	5.83
100,000	5.75

על פי הטבלה, ניתן להיווכח ולראות כי נדרש מדגם של לפחות 50,000 סימולציות עבור המקרה הפשוט של אופציה אירופאית סטנדרטית.

<u>הגישה המדויקת</u>

ניתן להשתמש בגישה מדויקת יותר באמצעות הנוסחה הבאה:

$$d \ln S = \left(\hat{\mu} - \sigma^2/2\right) dt + \sigma\, dz$$

הגרסה הדיסקרטית של הנוסחה הנ"ל היא:

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \sigma^2/2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

או לחילופין:

$$S(t + \Delta t) = S(t)\, e^{\left(\hat{\mu} - \sigma^2/2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$$

מבחינת המתודולוגיה אין כל שינוי. כלומר, על מנת להעריך אופציות אירופאיות על מניות, סימולציית MC בגישה סדר הפעולות הינו כדלקמן:

1. לדמות מסלול אחד עבור מחיר המניה בעולם מנוטרל סיכון.
2. לחשב את תזרים המזומנים מהאופציה על המניה.
3. לחזור על צעדים 1 ו- 2 כמה אלפי פעמים על מנת לקבל דגימת תזרים מזומנים.
4. לחשב את תוחלת תזרים המזומנים.
5. להוון את תוחלת תזרים המזומנים בשיעור הריבית חסרת הסיכון על מנת לקבל אומדן עבור ערך האופציה.

כאשר נגזר כלשהו תלוי במספר משתני סיכון, הרי שאנו יכולים לדמות מסלולים עבור כל אחד מהם בעולם מנוטרל סיכון ולחשב את הערכים עבור הנגזר. נציין עוד שבמקום לדגום מסלולים מתוך תהליך סטוכסטי, אנו יכולים לדגום מסלולים באופן אקראי דרך עץ בינומי או תרינומי על מנת להעריך נגזר.

על מנת לדגום מתוך התפלגות נורמאלית ניתן להשתמש בפונקציה "= NORMSINV(RAND())" ב- Excel הנותנת דגימה אקראית מ- $\phi(0,1)$. במידה ונרצה ניתן להשיג שתי דגימות נורמאליות מתואמות בדרך הבאה, נשיג דגימות נורמאליות בלתי תלויות X_1 ו- X_2 ונקבע ש:

$$\varepsilon_1 = x_1$$
$$\varepsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

התהליך הנ"ל ידוע בשם כדיקומפוזיית צ'ולסקי (Cholesky's Decomposition) כאשר דגימות נדרשות מתוך יותר משתי משתנים נורמאליים.

במידה ורוצים לאמוד את הדלתא (Δ) של האופציה יש לפעול על פי השלבים הבאים:

1. לשנות במקצת את מחיר הנכס.
2. להריץ את הסימולציה שוב באמצעות אותם זרמי המספרים האקראיים.
3. לאמוד את הדלתא כשינוי במחיר האופציה מחולק בשינוי במחיר הנכס.

עבור אותיות יווניות נוספות יש לפעול באותה שיטה.

טכניקות להפחתת השונות

מחיר האופציה המתקבל מסימולציית MC הוא ממוצע המדגם. על כן, סטיית התקן של ממוצע המדגם, היא סטיית התקן של המדגם מחולקת בשורש הריבועי של גודל המדגם.[50] כתוצאה מכך, השגיאה קטנה בשיעור של 1 חלקי השורש הריבועי של גודל המדגם. יש לשים לב שהמשמעות היא שהגדלת המדגם מביאה בהכרח להגדלת הדיוק של המדגם. נניח ש- σ היא סטיית התקן של המדגם. ראשית, נערוך סימולציית MC באמצעות n_1 הגרלות אקראיות.

מאחר וערך האופציה הוא תוחלת המדגם, הרי שסטיית התקן של האומדן שלנו למחיר האופציה היא $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$. כעת נניח שאנו רוצים להקטין את סטיית התקן בחצי. בכמה עלינו להגדיל את המדגם? אם נסמן את גודל המדגם החדש ב- n_2, או אז סטיית התקן של האומדן למחיר המניה היא $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$. כעת נסמן ש $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$, אם ורק אם $n_2=4\cdot n_1$. על כן, על מנת להשיג ירידה של 50% בטעות, הווה אומר, שיפור של 50% בדיוק, עלינו להכפיל ב- 4 את מספר ההגרלות האקראיות. לכן סטיית התקן קטנה רק בשורש הריבועי של גודל המדגם, ולא בגודל המדגם עצמו.

ישנן כמה טכניקות להפחתת השונות, כגון: 1) שיטת המשתנה הנגדי (Antithetic variable technique); 2) שיטת משתנה השליטה (Control variate technique); 3) Importance sampling; 4) Stratified sampling; 5) Moment matching; 6) שימוש ברצפים כביכול אקראיים (Quasi-rando) sequences). במאמר זה נציג את הטכניקה הראשונה בלבד.

כאשר אנו מודעים למצב בו טעות התקן של האומד למחיר האופציה, היא סטיית התקן של תזרים המזומנים המהוון הנתון ע"י ניסויי הסימולציה, מחולקת בשורש הריבועי של מספר התצפיות. חובה על המשתמש בסימולציית MC לנסות להשיג דיוק רב יותר באמצעים אחרים. שיטה אחת שבעזרתה ניתן להגיע לדיוק רב יותר היא די פשוטה, ומכפילה באופן אוטומטי את גודל המדגם עם עלייה מינימאלית בזמן החישוב. שיטה זו ידועה בשם ***"שיטת המשתנה הנגדי"*** (Antithetic variable technique). נציין כי בסימולציית MC סטנדרטית, אנו יוצרים תצפיות של משתנה אקראי נורמאלי סטנדרטי. המשתנה האקראי הנורמאלי סטנדרטי מתפלג עם תוחלת של אפס, שונות של 1.0 והוא סימטרי. לכן, עבור כל ערך שאנו מגרילים, קיים סיכוי סביר זהה להגריל את ערך התצפית כפול 1-. כתוצאה מכך, עבור כל ערך שאנו מגרילים, אנו יכולים ליצור תצפית מלאכותית של הערך שהגרלנו כפול מינוס 1. זהו המשתנה הנגדי. אנו פשוט משתמשים בשיטה באותה הדרך שבה אנו משתמשים בערך אותו אנו מגרילים, דהיינו בחישוב מחיר המניה עבור חישוב מחיר האופציה. התהליך הנ"ל אוטומטית מכפיל לנו את גודל המדגם מבלי להגדיל את מספר ההגרלות האקראיות.

[50] למרות שזוהי נקודה מתוך עקרונות הסטטיסטיקה האלמנטאריים ביותר, כדאי להבחין בין סטיית התקן של המדגם וסטיית התקן של תוחלת המדגם. האחרונה היא הראשונה מחולקת בשורש הריבועי של גודל המדגם. לכן, תוחלת המדגם היא הרבה פחות תנודתית מאשר ערכי המדגם עצמם.

במקרה של Black & Schools, שמתכנס במהירות בסימולציה, שיטת המשתנה הנגדי לא תשנה כל כך. למטה מוצגים קבוצות של סימולציות באמצעות השיטה הסטנדרטית והשיטה והנגדית:

מחיר אופציית Call		
n	**השיטה הסטנדרטית**	**שיטת המשתנה הנגדי**
1,000	5.58	5.70
10,000	5.51	5.69
50,000	5.83	5.79
100,000	5.75	5.78

נזכיר כי לפי נוסחת Black & Schools מחיר האופציה הוא 5.79. בנוסף ניתן לראות כי היתרונות של שיטת המשתנה הנגדי גדלים ככל שגודל המדגם יורד.

שיטה אחרת שניתן להשתמש בה עבור סוגים שונים של אופציות נקראת ***"שיטת משתנה השליטה"*** (Control variate technique). משתנה השליטה בהקשר הזה היא אופציה דומה שהערך האמיתי שלה ידוע, אנו נשיג את הערך המלאכותי של האופציה הנ"ל. ההפרש בין הערך האמיתי של משתנה השליטה והערך המלאכותי שלו יתווסף לערך המלאכותי של האופציה. בוא נראה כיצד השיטה הנ"ל עובדת.

נקבע ש c_s הינו המחיר המלאכותי של האופציה שאנו מנסים לתמחר, v_t הינו הערך האמיתי של אופציה דומה אחרת, ו- v_s הינו הערך המלאכותי. נגדיר את משתנה השליטה שלנו כ:

$$c_s + (v_t - v_s)$$

אם כך, מה שאנו עושים זה מריצים סימולציה של $c_s - v_s$ ומוסיפים v_t. נציין שהתוצאה היא:

$$Var(c_s - v_s) = Var(c_s) + Var(v_s) - 2\operatorname{cov}(c_s, v_s)$$

המשמעות היא ששיטת משתנה השליטה נשענת על ההנחה של שונות משותפת גדולה בין v_s ו- c_s. משתנה השליטה הנבחר צריך להיות בעל מתאם גבוה מאוד עם האופציה שאותה אנו מתמחרים.

<u>יישום סימולציית MC</u>

ניתן ליישם את סימולציית MC עבור אופציות "תלויות מסלול" (Path Dependent). לקבוצה זו משתייכות אופציות שבהן ישנה חשיבות להתנהגות המחיר של נכס הבסיס במהלך חיי האופציה. כך לדוגמא, בסוג אחד של אופציה אקזוטית מקבוצה זו, המכונה אופציה אסייתית, השער להתחשבנות ביום המימוש הינו ממוצע השערים במהלך חיי

האופציה לפני המימוש. אופציה נוספת ממשפחה זו, המכונה Lookback Option, היא אופציה המאפשרת למחזיק בה לקנות את נכס הבסיס ביום המימוש במחיר הנמוך ביותר שהיה במהלך חיי האופציה (אופציית Call), או למכור את נכס הבסיס בפקיעה במחיר הגבוה ביותר שהיה במהלך חיי האופציה (אופציית Put). במשפחה זו ניתן למצוא גם אופציות חסם. למעשה סימולציית MC יודעת לטפל באופציות התלויות במספר משתני בסיס, ובאופציות בעלות תזרים מזומנים מורכב, אך לא יודעת לטפל באופציות אמריקאיות.

כאמור לעיל, יישום טכניקת MC עבור אופציות מסובכות יותר כמו אופציות תלויות מסלול דורש חלוקה של חיי האופציה לתקופות זמן, כמו במודל הבינומי. נניח ואנו רוצים לתמחר אופציה אסייתית, קרי אופציה שמחיר הנכס להתחשבנות מוחלף במחיר הממוצע של הנכס במשך חיי האופציה. אם נניח כי תנאי חוזה האופציה קובעים שהמחיר הממוצע יחושב מצירוף מחירי הנעילה היומיים של הנכס למשך חיי האופציה. בהתעלם מחגים וסופי שבוע, ניתן לומר שמשך חיי האופציה הוא 90 יום. אזי הרצה אחת תכלול 90 הגרלות אקראיות, אשר בכל אחת מהן אנו

נעזרים על מנת לדמות את מחיר המניה בסוף כל אחד מ- 90 הימים. הנוסחה עבור כל ΔS מבוססת על מחיר הנעילה ביום הקודם. ערכו של Δt יהיה 1/365. ניתן לומר כי הממוצע של 90 מחירי נעילה יקבע את תזרים המזומנים מהאופציה בפקיעה. כמובן שנצטרך לחזור על התהליך לפחות 50,000 פעם. ככל שהאופציה מורכבת יותר, כך נדרש לפחות ל- 100,000 הרצות.
אופציות אסייתיות מתאימות באופן אידיאלי ל"שיטת משתנה השליטה". למרות שאופציות אסייתיות שכיחות במציאות, הממוצע כמעט תמיד מחושב באופן אריתמטי ולא גיאומטרי. מכל מקום, זה אפשרי לבנות אופציות אמריקאיות כך שתזרים המזומנים שלהן יתבסס על ממוצע גיאומטרי, שהוא השורש ה- j של המוצר אשר- j מחירים שלו משמשים לחישוב הממוצע. עבור אופציית מחיר ממוצע גיאומטרי, ישנו בהחלט פתרון "מודל סגור" עבור מחיר האופציה. גישה מקובלת לתמחור אופציות אסייתיות עם ממוצע אריתמטי היא להשתמש באופציות אסייתיות עם ממוצע גיאומטרי כמשתנה השליטה.

לא מומלץ שניכנס לפרטים של אופציות אסייתיות במאמר הנ"ל, אבל כדאי שנציג את תוצאות סימולציית MC בעזרת השיטה הסטנדרטית, שיטת משתנה השליטה ושיטת המשתנה הנגדי עבור אופציית הדוגמא שלנו, כעת אופציה אסייתית עם 50 מחירים המשמשים לחישוב הממוצע. התוצאות הבאות הן עבור אופציות Put עם אותן תנאים כמו אופציות ה- Call.

מחיר אופציית Call			
n	**השיטה הסטנדרטית**	**שיטת משתנה השליטה**	**שיטת המשתנה הנגדי**
1,000	3.33	3.11	3.14
10,000	3.19	3.11	3.16
50,000	3.16	3.11	3.17
100,000	3.16	3.11	3.16

ההבדלים במחירים המושגים באמצעות שיטת משתנה השליטה אינם מתגלים עד אשר מגדילים את מספר הספרות לאחר הנקודה העשרונית. נציין, שבמקרה דנן, שיטת משתנה השליטה כמעט ולא עזרה לנו כלל. אולם, עבור מדגמים קטנים היא יכולה לעזור הרבה יותר. נציין שעבור מדגמים קטנים, שיטת משתנה השליטה הרבה יותר מדויקת מהשיטה הסטנדרטית. ודאי שעבור מדגמים גדולים, הגישה הסטנדרטית הינה מדויקת ובאופן טבעי נכונה מבחינה תיאורטית "בגבול" (כלומר כמעט שם אבל לא לגמרי). במקרים שכאלה, השיפורים הללו לשיטה הסטנדרטית יכול שלא ממש יעזרו.

שימוש נוסף לסימולציית MC, הינו בחינת סבירות תוצאות הערכת שווי חברה/פעילות/מגזר/פרויקט המתקבלות משימוש במתודולוגיית שיטת היוון תזרימי המזומנים (Discounted Cash Flows), באמצעות שימוש במודל MC. מודל MC מבוסס על סדרות סימולציית משתני החלטה סטטיסטיים סטוכסטיים (10,000 איטרציות), המבוססים על סטיות תקן ותוחלת משתני החלטה (Variable Factors) קריטיים במודל, על ידי חישוב איטרטיבי לשווי אקוויטי החברה למצבי טבע ותרחישים שונים. מודל זה משמש לשם בחינת התפלגות התוצאות ביחס לשונות ותוחלת משתנים פרוספקטיביים קריטיים לתוצאות הערכת השווי וביחס לתוצאות פעילות רטרוספקטיביות של החברה. מכלול המשתנים הקריטיים שמומלץ לבחון הינם שונות ותוחלת משתני ה- WACC (ממוצע משוקלל של

מקורות המימון לפעילות החברה, אשר נקבע על בסיס מודל ה- Weighted Average Cost of Capital), שיעור צמיחת הכנסות החברה על פני אופק ההיוון, שונות ותוחלת משתני ה- CAGR (שיעור צמיחה פרמננטית אשר נקבע על בסיס מודל ה- Compound Annual Growth Rate), שולי ההוצאות המשתנות השונות וכו'.