Intrinsic Value
Independent Business Appraisers

מבוא למודל בלק–שולס

מודל בלק-שולס לתמחור אופציות אירופאיות

פישר בלק ומיירון שולס היו שני כלכלנים אשר פרסמו בשנת 1973 מאמר ששינה את פני עולם המימון והנגזרים הפיננסיים. מאמרם "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" פורסם בחודש מאי באותה שנה בכתב העת Journal of Political Economy.

אף שהיסודות התיאורטיים למודל פותחו עוד קודם לכן, מאמר זה נחשב לאחד המאמרים החשובים ביותר בתיאוריה הפיננסית. המודל משמש עד היום לתמחור מגוון רחב של מכשירים נגזרים, לרבות אופציות על סחורות, נכסים פיננסיים ואף אופציות לעובדים.

בהסתמך בין היתר על עבודת הדוקטורט של ג'יימס בונס שהיה סטודנט באוניברסיטת שיקגו, פיתחו בלק ושולס מודל אנליטי המוכר כיום כמודל בלק–שולס לתמחור אופציות. המודל מספק פתרון סגור (Closed-Form Solution) לתמחור אופציות אירופיות רגילות (Vanilla Options) ובהמשך הורחבה המסגרת התיאורטית שלו לתמחור סוגים נוספים של אופציות.

ההנחות העומדות בבסיס המודל

1. המניה המשמשת כנכס הבסיס אינה מחלקת דיבידנדים במהלך חיי האופציה.
2. ניתן לממש את האופציה רק במועד פקיעתה, כלומר מדובר באופציה אירופית.
3. שוקי ההון יעילים, ותנועות המחירים אינן ניתנות לחיזוי שיטתי.
4. לא קיימות עמלות עסקה.
5. שיעור הריבית חסרת הסיכון ידוע וקבוע לאורך חיי האופציה.
6. מחירי המניה מתפלגים לוג־נורמלית, כלומר התשואות הלוגריתמיות מתפלגות נורמלית.

מודל בלק-שולס (ללא דיבידנדים) 1973

לצורך תמחור אופציה אירופית על מניה שאינה מחלקת דיבידנדים, נדרשים משתני הקלט הבאים:

S = מחיר המניה המשמשת כנכס הבסיס.

X = מחיר המימוש של האופציה.

r = שיעור הריבית חסרת הסיכון, בחישוב רציף.

σ = התנודתיות השנתית של תשואות נכס הבסיס.

$T - t$ = הזמן שנותר עד לפקיעת האופציה, במונחים שנתיים.

באמצעות משתנים אלה ניתן לחשב את שווייה של אופציית רכש אירופית (European Call Option) על מניה שאינה מחלקת דיבידנדים:

$$c_t = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

באופן דומה, שווייה של אופציית מכר אירופית (European Put Option) על מניה שאינה מחלקת דיבידנדים מחושב באמצעות המשוואה:

$$p_t = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Tel: 077.507.0590 ▶ Fax: 153.77.507.0590 ▶ www.intrinsicvalue.co.il ▶ polanitz5@gmail.com

כאשר $N(d_1)$ ו- $N(d_2)$ מייצגות את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, המחושבת בנקודות d_1 ו- d_2, בהתאמה.

המשתנים d_1 ו- d_2 מוגדרים כדלקמן:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

באמצעות הצבה אלגברית ניתן לפשט את הביטוי עבור d_2 ולקבל:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

לצורך חישוב פונקציית ההתפלגות הנורמלית המצטברת, ניתן להיעזר בנגזרת שלה, שהיא פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

לאחר הצבת הערכים של d_1 ושל d_2 בפונקציית ההתפלגות המצטברת, מתקבלים הביטויים הנדרשים לחישוב שוויין של אופציות הרכש והמכר, כפי שהוגדרו לעיל.

מודל מרטון (עם דיבידנדים) 1973

כאשר מניית הבסיס מחלקת דיבידנדים, ניתן להרחיב את מודל בלק–שולס המקורי באמצעות הוספת תשואת דיבידנד שנתית.

הרחבה זו הוצגה על ידי רוברט מרטון בשנת 1973.

נסמן באמצעות d את תשואת הדיבידנד השנתית הרציפה של מניית הבסיס.

במקרה זה, שווייה של אופציית רכש אירופית מחושב כך:

$$c_t = Se^{-d(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Tel: 077.507.0590 ▶ Fax: 153.77.507.0590 ▶ www.intrinsicvalue.co.il ▶ polanitz5@gmail.com

כאשר:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r - d + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r - d - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

בדומה למודל ללא דיבידנדים, ניתן לפשט את הביטוי עבור d_2:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

תמחור אופציית מכר באמצעות יחס שוויון אופציות רכש ומכר (PCP)

ניתן לחשב את שווייה של אופציית מכר באמצעות יחס שוויון אופציות רכש ומכר (Put–Call Parity).

כאשר מניית הבסיס אינה מחלקת דיבידנדים, מתקיים:

$$c_t - p_t = S_t - Xe^{-r(T-t)}$$

ולפיכך:

$$p_t = c_t - S_t + Xe^{-r(T-t)}$$

כאשר מניית הבסיס מחלקת דיבידנדים בשיעור שנתי רציף d, מתקיים:

$$c_t - p_t = S_t e^{-d(T-t)} - Xe^{-r(T-t)}$$

ולכן:

$$p_t = c_t - S_t e^{-d(T-t)} + Xe^{-r(T-t)}$$

לחלופין, ניתן לחשב את שווייה של אופציית מכר אירופית על מניה המחלקת דיבידנדים באמצעות הנוסחה המלאה:

$$p_t = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-d(T-t)}N(-d_1)$$

עבודתם של בלק ושולס בשנות השבעים הניחה את היסודות לפיתוחם של מודלים נוספים לתמחור מכשירים נגזרים, ובפרט אופציות אקזוטיות (Exotic Options).

Tel: 077.507.0590 ▶ Fax: 153.77.507.0590 ▶ www.intrinsicvalue.co.il ▶ polanitz5@gmail.com

המשוואה הדיפרנציאלית החלקית של בלק–שולס אפשרה גם את גזירתם של מדדי הרגישות המשמשים בניתוח ובניהול סיכוני אופציות המכונים "יווניות" (Greeks).

כיום מודל בלק–שולס משמש באופן שוטף לתמחור אופציות, ואילו המסגרת התיאורטית שעליה הוא מבוסס עומדת בבסיסם של מודלים רבים לתמחור נגזרים מורכבים, לרבות אופציות חסם (Barrier Options), אופציות על אופציות (Compound Options) ואופציות אסייתיות (Asian Options).

מקורות נוספים

Black, F. & **Scholes, M.** *"The Pricing of Options & Corporate Liabilities"* The Journal of Political Economy (May '73)

Hull, J. *"Options, Futures & Other Derivatives"* 5th Edition 2002 - Chapter 12

Merton, R. *"Theory of Rational Option Pricing"* Bell Journal of Economics & Management (June '73)

Tel: 077.507.0590 ▶ Fax: 153.77.507.0590 ▶ www.intrinsicvalue.co.il ▶ polanitz5@gmail.com

אודות כותב המאמר: האקטואר רועי פולניצר



האקטואר רועי פולניצר הוא הבעלים והאקטואר הראשי מעריך השווי הראשי של פירמת הערכות השווי והייעוץ האקטוארי "שווי פנימי – מעריכי שווי בלתי תלויים", המתמחה במימון, הערכות שווי, אקטואריה, אופציות, ניהול סיכונים והנדסה פיננסית. הוא מונה בידי יחידת המומחים של הנהלת בתי המשפט לשמש מומחה מטעם בתי המשפט בתחומי ההתמחות: אקטואריה וכלכלה.

האקטואר פולניצר מונה בידי סגן ראש הממשלה ושר המשפטים כחבר בוועדות לבחירת אקטוארים וכלכלנים מטעם בתי המשפט ובעבר עמד בראש הוועדה לקביעת מדיניות הערכות שווי עבור עובדי רשות המסים בישראל ("וועדת פולניצר") וייסד וכיהן כנשיא האיגוד הישראלי לאקטוארים (AIA). כיום הוא מייסד ונשיא לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA).

האקטואר פולניצר בעל תואר ראשון (B.A.) בכלכלה ותואר שני (M.B.A.) במנהל עסקים, שניהם בהתמחות בהערכות שווי ואקטואריה ובהצטיינות מאוניברסיטת בן־גוריון בנגב. הוא אקטואר מוסמך וחבר מלא (Fellow) בלשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (FILAVFA), באיגוד הישראלי לאקטוארים (FAILA), באיגוד העולמי לאקטוארים (FRM) וכן מעריך שווי תאגידים ונכסים בלתי מחושיים מוסמך (CFV) ומעריך שווי נגזרים ומכשירים פיננסיים מורכבים מוסמך (QFV). בנוסף, הוא נמנה עם מקימי התוכנית ללימודי תעודה באקטואריה וניהול סיכונים באוניברסיטת בן-גוריון בנגב.

האקטואר פולניצר ייעץ לרשות המסים בישראל, לבנקים, לחברות ביטוח ולחברות ציבוריות ופרטיות, בארץ ובחו"ל. בנוסף, הוא מחבר הספרים "המדריך למעריכי שווי תאגידים" (2025) ו"המדריך לאקטוארים של ביטוח חיים" (2025), ופרסם למעלה מאלף מאמרים מקצועיים בתחומי הערכות השווי והאקטואריה, בין היתר ב"סטטוס", "ביטוח ופיננסים", "רבעון לבנקאות", ובפרסומי מכון יוסף קסירר למחקר בחשבונאות.

בנוסף, האקטואר פולניצר עבר בהצלחה את כל שלבי המיון הן לתפקיד האקטואר הראשי ברשות שוק ההון, ביטוח וחיסכון והן לתפקיד מנהל תחום הערכות שווי ושינויי מבנה ברשות המסים. בנוסף, הוא התמודד על תפקיד המפקח על הבנקים בבנק ישראל.

Tel: 077.507.0590 ▶ Fax: 153.77.507.0590 ▶ www.intrinsicvalue.co.il ▶ polanitz5@gmail.com