

חישובי הון: שווי עתידי של סדרת תשלומים ושווי נוכחי של סדרה אינסופית צומחת



האקטואר רועי פולניצר מסביר כיצד אקטוארים מבצעים חישובי שווי עתידי של סדרת תשלומים ושווי נוכחי של סדרה אינסופית קבועה וצומחת

מזומנים צומח אינסופי, כאשר התשלום הראשון מתקבל בעוד תקופה, הינו:

$$FV = PMT \cdot v_1^1 + PMT \cdot v_1^2 + PMT \cdot v_1^3 + \dots$$

לאחר ביצוע מניפולציות מתמטיות כאלו ואחרות נקבל ש-:

$$PV = PMT / (i - g)$$

אם ניצוק לנוסחא לעיל את נתוני החברה נקבל ששווי החברה הינו 6,666,667 ₪:

$$PV = 1,000,000 / (0.20 - 0.05) = 6,666,667$$

שימו לב, שהנוסחה הכללית לחישוב שווי הנוכחי של זרם מזומנים צומח אינסופי, כאשר התשלום הראשון מתקבל מיד, הינו:

$$PV = PMT / ((i - g) \cdot v_1)$$

נשאלת השאלה, במידה והרווח הראשון היה מתקבל מיידית ולא בעוד שנה, והצמיחה הייתה מתחילה החל מבעוד שנה ולא החל מעוד שנתיים, כיצד הייתה משתנה התשובה? מצד אחד ניתן פשוט להציב בנוסחה ולקבל

$$PV = 1M / ((0.20 - 0.05) \cdot v_{0.20}) = 8M$$

מצד שני, ניתן לחשב את הרווח של בשנה הבאה

$$PMT_1 = 1,000,000 v_{0.05}^{-1} = 1,050,000$$

לאחר מכן לחשב סדרה צומחת אינסופית המתחילה משנה הבאה

$$PV = 1,050,000 / (0.20 - 0.05) = 7,000,000$$

ולבסוף, להוסיף לשווי שקיבלנו (7,000,000 ₪) רווח מידי (היום) של 1,000,000 ₪ ולכן גם בדרך זו, קיבלנו שווי חברה שווי של 8,000,000 ₪.

ההבדל בין תשואה צפויה לבין שיעור היוון

לא כולם מכירים את ההבדל בין תשואה צפויה לבין שיעור היוון ולכן יש כאלו המהוונים קצבאות פנסיה בשיעור התשואה הצפויה. נסביר במשפט אחד שבעוד שתשואה צפויה הינה ממוצע שיעורי התשואה שהושגו בפועל על כספי הפנסיה ועל כן נועדה לשמש לעיתוד ערך הפדיון של הפנסיה עד לגיל הפרישה, הרי ששיעור ההיוון מחושב כעלות ההשקעה האלטרנטיבית (למשל, שיעור התשואה של אג"ח בשל קיומה של חלופה להשקיע באג"ח, בין אם בפועל כספי הפנסיה הושקעו באג"ח ובין אם לאו) ונועד להיוון תשלומי הפנסיה שישולמו מגיל הפרישה ועד לשארית חייו של העמית מהוונים לגיל הפרישה.

הכותב משמש כאקטואר הראשי של "שווי פנימי", מכהן כיו"ר לשכת מערכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) והתמודד בעבר על משרת האקטואר הראשי ברשות שוק ההון, הביטוח והחיסכון.

נציב בנוסחה לתזרימים המשתלמים בסוף תקופה ונקבל: $FV = 500 \cdot S_{\overline{360}|0.007}$ קרי, $500 \cdot (v_{0.007}^{-360} - 1) / 0.007 = 808,569$

חישוב שווי נוכחי של סדרה אינסופית לא צומחת

לעיתים אנו מעוניינים להעריך את שווייה הנוכחי של סדרת תשלומים אינסופית. האם שווייה הנוכחי של סדרה שכזו יהיה שווה לאינסוף? ממש לא.

הסיבה ששווי נוכחי של סדרת תשלומים אינסופית אינו שווה לאינסוף, הינה בשל "הכיווץ" בערכם של תזרימים מתקופות מאוחרות אשר מהווים לשוויים נוכחיים, הרי ששוויים הנוכחי הולך ושוואף לאפס. למעשה שיטת החישוב דומה לחישוב סכום של טור גיאומטרי אינסופי יורד. אם נציב ∞ בנוסחת השווי הנוכחי של סדרת תשלומים, נקבל:

$$PV = PMT \cdot a_{\infty|i} = PMT \cdot (1 - v_i^{\infty}) / i$$

מאחר וכל מספר שאיננו אפס או אחד בחזקת אינסוף שווה לאינסוף והואיל וכל מספר חלקי אינסוף שווה לאפס, הרי שבסוגריים המרובעים שבנוסחא לעיל נקבל 1 פחות 0 שזה שווה ל-1. לכן ניתן לכתוב בקיצור:

$$PV = PMT / i$$

לדוגמה: מהו שווייה ההוגן של אג"ח צמיתה (אג"ח קונסול) המשלמת למחזיק בה תשלומי ריבית שנתיים בגובה 10 ₪ לשנה החל מבעוד שנה לנצח, כאשר התשואה השנתית הנדרשת על השקעה שכזו הינה 15% לשנה? נציב בנוסחה:

$$PV = 10 \cdot a_{\infty|0.15} = 66.66$$

נשאלת השאלה, במידה והתשלום הראשון היה מתקבל מיידית ולא בעוד שנה, כיצד הייתה משתנה התשובה? למעשה יש להוסיף לשווי שקיבלנו 66.66 ₪ שווי נוכחי נוסף של 10 ₪ (בגין הריבית המיידית). לפיכך שווייה ההוגן של האיגרת החדשה יעמוד על 76.66 ₪.

$$PV = 10 \cdot \ddot{a}_{\infty|0.15} = 76.66$$

חישוב שווי נוכחי של סדרה אינסופית צומחת

לעיתים קרובות אנו מעוניינים לחשב את שווייה ההוגן של סדרת תשלומים אינסופית הצומחת בקצב קבוע g.

לדוגמה חברה מסוימת צפויה להרוויח 1,000,000 ₪ בעוד שנה, כאשר הרווח בשנים שלאחר מכן צפוי לצמוח בקצב קבוע של 5% לשנה, בעוד ששיעור ההיוון הראוי לרווחי החברה נאמד בכ- 20% לשנה.

הנוסחה הכללית לחישוב שווי הנוכחי של זרם

מאמר הקודם הראיתי שעל מנת לחבר ולחסר תזרימים מתקופות שונות, עלינו "להוון" את כל התזרימים לערכי אותה תקופה, כאשר היוון התזרימים מבוצע באמצעות שער הריבית האלטרנטיבית של אותם תזרימים, הקרוי גם "שיעור ההיוון". בנוסף, הצגתי נוסחאות המקשרות בין שווי נוכחי (PV) לבין שווי עתידי (FV) ותזרימים תקופתיים (PMT).

חישוב שווי עתידי של סדרת תשלומים

ישנם מצבים שבהם אנו מעוניינים לדעת דווקא מה הוא שווי העתידי של זרם מזומנים מסוים. עולה השאלה, נניח שברווחנו לרכוש מכונית חדשה בעוד 4 שנים מהיום וביכולתנו לחסוך למטרה זו 10,000 ₪ בתחילת כל שנה (החיסכון הראשון מופקד כבר היום). נשאלת השאלה, כמה כסף יהיה ברשותנו בעוד 4 שנים אם הריבית השנתית על החסכונות שלנו עומד על 7% לשנה?

השווי העתידי בעוד 4 שנים מהיום של הסכום שיופק היום לתקופה של 4 שנים יהיה: $10,000 v_{0.07}^{-4} = 13,108$. השווי העתידי בעוד 4 שנים מהיום של הסכום שיופק בעוד שנה לתקופה של 3 שנים: $10,000 v_{0.07}^{-3} = 12,250$. השווי העתידי בעוד 4 שנים מהיום של הסכום שיופק בעוד שנתיים למשך שנתיים יהיה: $10,000 v_{0.07}^{-2} = 11,449$. השווי העתידי בעוד 4 שנים מהיום של הסכום שיופק בעוד 3 שנים למשך שנה יהיה: $10,000 v_{0.07}^{-1} = 10,700$. השווי העתידי של 4 ההפקדות הינו 47,507 ₪.

גם כאן קיימת נוסחה "מקוצרת", שימו לב כי בדוגמה לעיל, התשלומים התקופתיים מופקדים בתחילת תקופה: $FV = PMT \cdot \ddot{S}_{\overline{n}|i}$ או $FV = PMT \cdot (v_i^{-n} - 1) / d$ כאשר: $d = i \cdot v$. אם ניצוק לנוסחה זו את הנתונים נקבל: $FV = 10,000 \cdot \ddot{S}_{\overline{4}|0.07} = 10,000 \cdot (v_{0.07}^{-4} - 1) / d_{0.07} = 47,507$

כאשר התזרימים התקופתיים מתקבלים בסוף כל תקופה, יש להשתמש בנוסחה הבאה: $FV = PMT \cdot S_{\overline{n}|i}$ או $FV = PMT \cdot (v_i^{-n} - 1) / i$

דוגמה נוספת: נניח כי דוד רוצה לחסוך לפנסיה. ביכולתו להפריש בתום כל חודש עד להגעה לגיל הפרישה מעבודה (גיל 67 לגבר) 500 ₪, ונניח שדוד כיום בן 37 ונותרו לו 30 שנה עד הגעתו לגיל הפרישה מעבודה. בהנחה שהתשואה שדוד יקבל על השקעתו תעמוד על 0.7% לחודש, כמה כסף יעמוד לזכותו בעוד 30 שנה (קרי, 360 חודשים)?