



ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר באקטואריה סיכונים תפעוליים היא ההתפלגות הלוג-נורמלית

האקטואר רועי פולינר מסביר מדוע ההתפלגות הלוג-נורמלית היא אבן היסוד של אקטואריה סיכונים תפעוליים וכיצד היא מאפשרת למדוד ולנהל סיכונים תפעוליים.

$$L = \sum_{i=1}^N X_i$$

כאשר:

- L – הפסד השנתי הכולל.
- N – מפולג פואסון (מספר אירועי הפסד)
- X_i – מפולג לוג-נורמלית (חומרת כל אירוע)

כאשר גם מספר האירועים וגם חומרת כל אירוע הם משתנים אקראיים. התפלגות הפסד השנתית מתקבלת באמצעות קונבולוציה של התפלגות השכיחות עם התפלגות החומרה במיליונים אחרות:

- שילוב שתי ההתפלגויות יוצר את התפלגות הפסד השנתית הכוללת.
- כאשר לא ניתן לבצע את הקונבולוציה בצורה אנליטית, נוהג להשתמש בסימולציות מונטה-קרלו. בכל סימולציה מגדילים תחילה מספר אירועים באמצעות לוח מספרים מקריים הבנוי על התפלגות פואסון, לאחר מכן מגדילים את חומרת כל אחד מן האירועים באמצעות לוח מספרים מקריים הבנוי על התפלגות לוג-נורמלית, ולבסוף מסכמים את כל הפסדים. חזרה על התהליך אלפי פעמים מייצרת קירוב להתפלגות הפסד השנתית.

מדוע דווקא ההתפלגות הלוג-נורמלית?

הלוג-נורמלית הפכה עם השנים לאחת ההתפלגויות הנפוצות ביותר במידול חומרת הפסדים תפעוליים משום שהיא משלבת מספר תכונות רצויות: ההפסדים תמיד חיוביים, ההתפלגות א-סימטרית, היא מאפשרת הופעת אירועי קיצון, מתאימה למגוון רחב של נתונים אמפיריים ופשוטה יחסית לאמידה וליישום. תכונות אלו הופכות אותה לבחירה טבעית עבור אקטוארים ומנהלי סיכונים בבנקים, חברות ביטוח, גופים מוסדיים וארגונים פיננסיים אחרים.

ההתפלגות הלוג-נורמלית

ההתפלגות הלוג-נורמלית נמצאת בשימוש נרחב במצבים שבהם הערכים מוטים ימינה (Positively Skewed), א-סימטריה חיובית). לדוגמה, בהנדסה פיננסית לצורך מידול התפתחות העתידית של הכנסות וההתנהגות עתידית של מניות או בתחום הנדל"ן לצורך הערכת שווי נכסים, כאשר הערכים אינם יכולים לרדת מתחת לאפס. מחירי מניות על פי רוב מפולגים בצורה מוטה ימינה ולא בצורה נורמלית (סימטרית). מחירי המניות מתאפיינים בכך שאינם יכולים לרדת מתחת לגבול התחתון של אפס, אך יכולים לעלות ללא גבול. באופן דומה, גם מחירי נדל"ן מפגינים א-סימטריה חיובית, שכן שווי נכס מקרקעין אינו יכול להיות שלילי.

תנאי ההתפלגות

שלושת התנאים העומדים בבסיס ההתפלגות הנורמלית הם:

- המשתנה הבלתירדאי יכול לעלות ללא גבול, אך אינו יכול לרדת מתחת לאפס.
- המשתנה הבלתירדאי מפולג בצורה מוטה ימינה, כאשר רוב הערכים מרוכזים בסמוך לגבול התחתון.
- הלוגריתם הטבעי של המשתנה הבלתירדאי מפולג נורמלית.

באופן כללי, אם מקדם השונות (Coefficient of Variation), היחס שבין סטיית התקן לתוחלת גדול מ-30%, מומלץ להשתמש בהתפלגות לוג-נורמלית. אחרת, מומלץ להשתמש בהתפלגות נורמלית.

המבנים המתמטיים של ההתפלגות הלוג-נורמלית הם כדלקמן:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\ln(\sigma)}} e^{-\frac{[\ln(x)-\ln(\mu)]^2}{2[\ln(\sigma)]^2}}$$

$$\text{for } x > 0; \mu > 0 \text{ and } \sigma > 0$$

- המוצג $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$
- סטיית התקן $\sqrt{\exp(\sigma^2) + 2\mu}[\exp(\sigma^2) - 1]$
- הא-סימטריה $\frac{[\exp(\sigma^2) - 1](2 + \exp(\sigma^2))}{\exp(\sigma^2)}$
- הגבנויות העודפת $\exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 6$
- התוחלת (μ) וסטיית התקן (σ) הן הפרמטרים היחידים המגדירים את ההתפלגות.

קביעת הפרמטרים

כברירת מחדל ההתפלגות הלוג-נורמלית משתמשת בתוחלת האריתמטית ובסטיית התקן האריתמטית. עם זאת, כאשר

אקטואריה סיכונים תפעוליים עוסקת במדידה, כימות וניהול של הפסדים כספיים הנובעים מכשלים בתהליכים פיננסיים, טעויות אנוש, הונאות, כשלים טכנולוגיים, מתקפות סייבר, כשלים במערכות מידע, תביעות משפטיות, אירועי ציות, אסונות טבע ואירועים חיצוניים נוספים העלולים לגרום נזק כספי משמעותי לארגון. בניגוד לסיכונים שוק או לסיכונים אשאי, שבהם גורם הסיכון הוא לרוב משתנה פיננסי אחד, הסיכון התפעולי מורכב ממספר רב של סוגי אירועים בלתי תלויים, השונים זה מזה הן בשכיחותם והן בחומרת הנזק שהם גורמים. אחד המאפיינים המרכזיים של סיכון תפעולי הוא שהפסדים גדולים הם נדירים, אך כאשר הם מתרחשים הם עלולים להיות בעלי השפעה כלכלית משמעותית ביותר. מסלול זה, אקטוארים ומנהלי סיכונים אינם מסתפקים בחישוב הפסד הממוצע, אלא מבקשים לאמוד את מלוא התפלגות הפסדים השנתית של הארגון. המסגרת המקובלת ביותר לביצוע שימיה זו היא מודל ה-LDA (Loss Distribution Approach), שבו מתארים בנפרד את מספר אירועי הפסד ואת גודל הפסד מכל אירוע, ולאחר מכן משלבים ביניהם לקבלת התפלגות הפסד הכוללת. למרות שהתפלגות השכיחות והתפלגות החומרה חשובות שתיהן, ההתפלגות המרכזית במודל בדרך כלל ההתפלגות הלוג-נורמלית, המשמשת למידול חומרת הפסדים הכספיים.

מודל ה-LDA (Loss Distribution Approach)

מודל ה-LDA מבוסס על ההבחנה שבכל שנה מתרחשים שני תהליכים אקראיים שונים:

- כמה אירועי הפסד יתרחשו במהלך השנה?
- מה יהיה גובה הפסד של כל אירוע?

לפיכך ממדדים בין שני מרכיבי הסיכון.

התפלגות השכיחות (Frequency Distribution)

מספר אירועי הפסד במהלך השנה מסומן בדרך כלל על ידי N , כאשר במקרים רבים מניחים כי:

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

כלומר, שמספר אירועי הפסד במהלך השנה מפולג פואסון. התפלגות פואסון מתאימה במיוחד משום שהיא מתארת את מספר האירועים המתרחשים בפרק זמן נתון כאשר האירועים בלתי תלויים זה בזה ומתרחשים בקצב ממוצע קבוע.

התפלגות החומרה (Severity Distribution)

לאחר שנקבע מספר אירועי הפסד, יש לאמוד את גודל הפסד של כל אחד מהם. נסמן את חומרת האירוע ה- i ב- X_i , כאשר במודלים רבים מקובל להניח:

$$X_i \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$$

כלומר, חומרת הפסד מפולגת לוג-נורמלית. המשמעות היא כי הלוגריתם של גודל הפסד מפולג נורמלית:

$$\ln(X_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

להנחה זו מספר יתרונות חשובים. ראשית, הפסדים כספיים אינם יכולים להיות שליליים, ולכן ההתפלגות הלוג-נורמלית מתאימה מטבעה למידול סיכומי הפסד. שנית, ההתפלגות היא א-סימטרית ובעלת זנב ימני ארוך, תכונה המאפיינת היטב הפסדים תפעוליים, שבהם רוב האירועים גורמים להפסדים קטנים יחסית, אך מספר קטן של אירועים עלול לגרום להפסדים עצומים. שלישית, ההתפלגות מאפשרת גמישות רבה בהתאמה לנתוני עבר ומופיעה לעיתים קרובות הן בספרות האקדמית והן בפרקטיקה של מדידה וניהול סיכונים (תחום המכונה "אקטואריה פיננסית" Financial Actuarial Science). כתב מאמר זה טבע את המונח "אקטואריה פיננסית" הן במסגרת סדרת מאמרים שפרסם בכתב העת סטטוס בשנת 2015 והן במסגרת הקמת לשכת מערכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) בסוף שנת 2014.

הקונבולוציה של ההתפלגויות פואסון ולוג-נורמלית
ההתפלגות השנתית של הפסד מתקבלת מקונבולוציה (קרי, מנכפלה של פונקציות) של **התפלגות דנ** שלפניו של **התפלגויות** של התפלגות השכיחות והתפלגות החומרה:

$$L = N \otimes X$$

לאחר שמודל השכיחות ומודל החומרה נאמדו בנפרד, יש לשלב ביניהם. אם מספר אירועי הפסד הוא:

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

וגודל כל הפסד הוא:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

אזי הפסד השנתי הכולל מוגדר כ-:

קיימים נתונים היסטוריים, ראוי יותר להשתמש או בתוחלת לוגריתמית וסטיתית התקן לוגריתמית או בתוחלת גיאומטרית וסטיתית התקן גיאומטרית (כמו ב-CAGR בהכנסות/מכירות).

אלטרנטיבה מרכזית להתפלגות הלוג-נורמלית

לצד ההתפלגות הלוג-נורמלית קיימת אלטרנטיבה חשובה נוספת – התפלגות וייבול (Weibull Distribution). התפלגות זו ידועה בעיקר מתחום הנדסת האמינות ומידול כשלים, אך היא משמשת גם במודלים של חומרת הפסדים תפעוליים. יתרונה המרכזי הוא הגמישות הרבה שלה. באמצעות שינוי פרמטר הצורה ניתן לקבל מגוון רחב של צורות התפלגות, ולכן היא מסוגלת להתאים למגוון סוגי הפסדים. מסיבה זו היא נפוצה במיוחד במודלים של כשלים במערכות מידע, כשלים בציד ובמערכות ייצור, אירועי אמינות, סיכונים תחזוקה וניתוחי שרידות של מערכות. במקרים רבים נוהג להשוות בין התאמת ההתפלגות הלוג-נורמלית לבין התאמת התפלגות וייבול ולבחור את ההתפלגות המתארת בצורה הטובה ביותר את נתוני ההפסד ההיסטוריים.

התפלגות וייבול (התפלגות ריילי)

התפלגות וייבול מתארת נתונים המתקבלים ממבחני אורך חיים (Life Tests) ומבחני עייפות חומר (Fatigue Tests). היא משמשת בדרך כלל לתיאור זמן הכשל (Failure Time) במחקרי אמינות, וכן לתיאור חוזק השבירה של חומרים בתחומי האמינות ובקרת האיכות. בנוסף, התפלגות וייבול משמשת לייצוג גדלים פיזיקליים שונים, כגון מהירות הרוח. התפלגות וייבול היא משפחה של התפלגויות היכולה לקבל את תכונותיהן של מספר התפלגויות אחרות. לדוגמה, בהתאם לפרמטר הצורה (Shape Parameter) שנבחר, ניתן להשתמש בהתפלגות וייבול כדי למדל גם את ההתפלגות האקספוננציאלית ואת התפלגות ריילי, בין היתר. התפלגות וייבול היא התפלגות נגישה מאוד. כאשר פרמטר הצורה של וייבול שווה ל-1.0, התפלגות וייבול זהה להתפלגות האקספוננציאלית. פרמטר המיקום (Location Parameter) של וייבול מאפשר להגדיר שהתפלגות האקספוננציאלית תתחיל מנקודת התחלה שונה מ-0.0. כאשר ערכו של פרמטר הצורה קטן מ-1.0, התפלגות וייבול מקבלת מתארת תיאור כשלים של רכיבים בתקופת ה-Burn-in (תקופת ההרצה הראשונית) שבה שיעור הכשלים גבוה יחסית. זו בדיקת הסיבה שבספרות של סיכון תפעולי נוהג למצוא את וייבול כאחת מההתפלגויות המרכזיות למידול חומרת אירועים, לצד ההתפלגות הלוג-נורמלית.

המבנים המתמטיים של התפלגות וייבול הם כדלקמן:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{x}{\beta} \right]^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha} \text{ for } \alpha \geq 0.05; \beta > 0$$

- המוצג $\beta \Gamma(1 + \alpha^{-1})$
- סטיית התקן $\beta^2 [\Gamma(1 + 2\alpha^{-1}) - \Gamma^2(1 + \alpha^{-1})]$
- הפרמטרים המגדירים את ההתפלגות הם פרמטר הצורה (central location) (α) ופרמטר קנה המידה (scale) (β) הם פרמטרי ההתפלגות, ואילו Γ היא פונקציית גמא.

סיכום

אקטואריה סיכונים תפעוליים מבוססת על ההבחנה בין שכיחות אירועי הפסד לבין חומרת הפסדים עצמם. התפלגות פואסון משמשת בדרך כלל למידול מספר אירועי הפסד, בעוד שההתפלגות הלוג-נורמלית משמשת למידול חומרת הפסד של כל אירוע. שילוב שתי ההתפלגויות באמצעות קונבולוציה יוצר את התפלגות הפסד השנתית, שהיא הבסיס למודל ה-LDA ולכיתומת הסיכון התפעולי. לצד ההתפלגות הלוג-נורמלית, התפלגות וייבול מהווה אלטרנטיבה מרכזית, בעיקר במודלים של כשלים ואמינות. עם זאת, בשל יכולתה לתאר הפסדים חיוביים בעלי אסימטריה ימנית וזנב ארוך, ההתפלגות הלוג-נורמלית נחשבת בעיני רבים להתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר במידול חומרת הפסדים באקטואריה סיכונים תפעוליים, והיא מהווה אבן יסוד במודלים המכמותיים למדידת סיכון תפעולי במסודות פיננסיים ובארגונים עסקיים.

הכתב הוא אקטואר סיכונים תפעוליים מוסמך, לשעבר נשיא האיגוד הישראלי לאקטוארים (AIA) וכיום נשיא לשכת מערכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA), מחבר הספר הראשון באקטואריה שפורסם אי פעם בישראל ובעברית "המדריך לאקטוארים של ביטוח חיים", מומחה לאקטואריה, מסמיק אקטוארים בישראל, בעל מקצוע מוערך בתחומי האקטואריה, מייסד של 2 איגודים אקטואריים מקצועיים מוכרים ובעל מוניטין, קיבל מסגן ראש הממשלה ומשר המשפטים (בהסכמת מ"מ נשיאת בית המשפט העליון) מינוי לכהן כחבר בוועדה לבחירת אקטוארים מטעם בתי המשפט בתפקיד נציג איגוד אקטוארי מוכר בישראל, קיבל מהנהלת בתי המשפט מינוי לתפקיד מומחה מטעם בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה וכלכל בשימת המומחים של בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה.