חיזוי שיעור הריבית הנומינלית העתידית החזויה של בנק ישראל בתום שנת 2024 באמצעות סבירות מרבית ומודל מונטה קרלו

האקטואר רועי פולניצר אמד את התפלגות שיעורי הריביות הנומינליות העתידיות החזויות של בנק ישראל לסוף שנת 2024 אשר ממנה ניתן לגזור הסתברויות שונות למצבי טבע ותרחישים שונים של שיעורי הריביות העתידיות החזויות.

אחת הטענות הבסיסיות של משקיעים הינה שאיש אינו יכול לחזות את השינויים העתידיים בשיעור הריבית הנומינלית של בנק ישראל **(להלן: "הריבית")** ומכאן שהם מתקשים מאד לקבוע האם בריבית הנוכחית כדאי להם לקחת משכנתא עכשיו כי עלולה להתרחש עליה בריבית או לחילופין דווקא שווה להם לחכות כי עשויה להתרחש ירידה בריבית. איש הרי אינו יודע מה יהיה בעתיד והעבר אינו מלמד דבר על הריביות שיתממשו מעתה והלאה. ואכן, אחת מאבני היסוד של תורת המימון היא הנחה פונדמנטלית (שאינה נתונה לשינוי) שקובעת שלריביות הנוכחיות בשוק "אין זיכרון" (memoryless) ואין הן יכולות לפיכך להיות מושפעות מריביות העבר. משמע, העבר אינו מלמד דבר על העתיד. זוהי הנחת בסיס למשל, במודל בלק אנד שולס לתמחור אופציות.

נניח שטענה זו נכונה. לא ניתן לדעת אם הריבית מחר, או בעוד חודש או בעוד שנה או בזמן כלשהו בעתיד תהיה גבוהה יותר או נמוכה יותר מהריבית הנוכחית, אותה ריבית הנקראת ריבית ה"ספוט". בואו לרגע ולא נניח לאלו הטוענים כך. הרי למעשה הם אומרים או מניחים שקיימת הסתברות של 50% שהריבית בעוד זמן t מהיום תהיה גבוהה יותר מריבית הספוט ובאותה מידה בהסתברות של 50% שהריבית בעוד זמן t מהיום תהיה נמוכה יותר מריבית הספוט. למעשה זוהי הנחה הזהה לזו של הטלת מטבע, "עץ" או "פאלי".

כמובן שיש לכאורה טיעון נוסף שאותו ניתן לטעון והוא שהריבית תהיה בדיוק באותו מקום בעוד זמן t מהיום אך אנו נתעלם מטיעון זה ונחזק את התעלמותנו בהנחה נוספת של תורת המימון הקרויה GBM (תנועה בראון גיאומטרית). GBM הינה הנחה תועלתנית לפיה מחירי מניות "נסחפים" על ציר הזמן לאורך קו מגמה מסוים (trend) בתוספת "רעש" תמידי (תנודתיות המורכבת משינויים אקראיים המכונים). אז מה אומרת הנחת GBM? היא למעשה אומרת לנו שמחירי מניות, מדדי מחירים, שערי חליפין, שערי ריבית ומחירי סחורות אינם נשארים אף פעם במקום אלא הם נעים ונדים כל הזמן. GBM הוא התהליך הסטוכאסטי העומד מאחורי התנהגות מחירי מניות ושערי חליפין, אך הוא אינו מתאים לשערי ריבית ומחירי סחורות.

שערי ריבית מפגינים על פני זמן תסוגה לממוצע ארוך טווח. תהליך שכזה המכונה Mean-Reversion מתנגש בהנחת GBM, המניחה שמחיר הנכס נע לאורך קו מגמה מסוים. גם מחירי סחורות מפגינים תסוגה לממוצע – מחיר הגז הטבעי עולה בחודשי החורף, יורד בחודשי הקיץ וכך חוזר חלילה, כך שבכל נקודת זמן הוא "שואף" או "נמשך" לכיוון המחיר הממוצע ארוך טווח.

מקובל למדל את ההתנהגות של שערי הריבית r_t באמצעות המשוואה הכללית הבאה המציגה תסוגה של שער הריבית הנוכחי לריבית הממוצעת ארוכת הטווח:

$$\Delta r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma r_t^{\gamma} \Delta z_t$$

כאשר Δz_t הוא תהליך וינר הרגיל של GBM. בתסוגה לממוצע, אנו מניחים ש- $0 \le k \le 1, \theta \ge 0, \sigma \ge 0$. מאחר שיש רק משתנה סטוכאסטי אחד (שער הריבית) המודל נקרא מודל של גורם בודד (one-factor model).

לתהליך של תסוגה לממוצע ישנם מספר תכונות מעניינות. התכונה הראשונה היא תסוגה לעבר הממוצע ארוך הטווח המסומן כ- θ. הפרמטר k שולט במהירות התסוגה לממוצע ארוך הטווח. כאשר ריבית הספוט גבוהה יותר מהממוצע ארוך הטווח $(r_t > \theta)$, המודל יוצר "סחיפה" (Drift) שלילית של $k(\theta - r_t)$ לעבר θ. לעומת זאת, כאשר ריבית הספוט נמוכה יותר מהממוצע ארוך הטווח $(r_t < \theta)$, המודל יוצר "סחיפה" חיובית לעבר θ.

התכונה השנייה היא תהליך התנודתיות. כאשר מעריך החזקה של שער הריבית המוכפל בתנודתיות הוא $\gamma = 0$, המודל נקרא מודל וסיצ'יק. השינויים בריבית מפולגים נורמלית מאחר ש- Δr היא פונקציה לינארית של Δz, שהיא כשלעצמה נורמלית. מודל וסיצ'יק נוח מאוד למידול התנהגות שערי ריבית. הבעייתיות של מודל וסיצ'יק היא שהוא עלול להוביל לשערי ריבית שליליים כאשר שער הריבית ההתחלתי הוא נמוך יחסית (קטן מ- 1%). הסיבה לכך היא שהתנודתיות של השינויים בשער הריבית אינה תלויה ברמת שער הריבית, בניגוד לתנודתיות ב- GBM שתלויה ברמת מחיר המניה.

$$Vasicek: \quad \Delta r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma \Delta z_t$$

כאשר מעריך החזקה של שער הריבית המוכפל בתנודתיות הוא $\gamma = 1$, המודל הוא המודל הלוג-נורמלי. אם נתעלם לרגע מאיבר התסוגה לממוצע ונניח שהוא אפס, או אז נקבל ש- $\Delta r_t = \sigma r_t \Delta z_t$ או $\Delta r_t / r_t = \sigma \Delta z_t$. משתמע מכך שלשיעור השינוי בשער הריבית dr/r ישנה שונות (variance) קבועה. לפיכך, כמו ב- GBM, גם בתסוגה לממוצע שערי ריבית נמוכים יותר מובילים לתנודות קטנות יותר, מה שמונע מהריבית לרדת מתחת לאפס (קרי, להפוך לשלילית). ברור שהמודל הלוג-נורמלי מתאים יותר ממודל וסיצ'יק כאשר שער הריבית ההתחלתי קרוב יותר לאפס (למשל ריבית של 0.25%).

$$Lognormal: \quad \Delta r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma r_t \Delta z_t$$

כאשר מעריך החזקה של שער הריבית המוכפל בתנודתיות הוא $\gamma = 0.5$, המודל הוא מודל קוקס, אינגרסול ורוס (C-I-R) בדומה למודל הבינומי הקלאסי של קוקס, רוס ורובינשטיין (C-R-R). בסופו של דבר, הבחירה במעריך החזקה γ הינה סוגיה אמפירית. מחקרים עדכניים מצביעים על כך ש $\gamma = 0.5$ מספק התאמה טובה (good fit) לשערי הריבית הנצפים בשוק. לפיכך, במאמר זה אעשה שימוש במודל C-I-R.

$$C - I - R: \quad \Delta r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma \sqrt{r_t} \Delta z_t$$

תחילה, אספתי נתונים על שערי הריבית החודשיים של ריבית בנק ישראל בתקופה 31.12.2018–31.12.2023. (61 חודשים). לאחר מכן, באמצעות טכניקה אקטוארית שנקראת "אומדני סבירות מרבית" Maximum (Likelihood Estimators: MLE) אמדתי את מהירות התסוגה לממוצע (k), את הריבית החודשית הממוצעת ארוכת הטווח (θ) (כשמדברים על העתיד מדברים על הממוצע. למה? כי הממוצע הוא המשערך/המנבא הטוב ביותר בטבע) ואת התנודתיות החודשית הצפויה של שיעורי השינויים בריבית (σ), לתקופה הנבדקת. ריבית הספוט עמדה נכון למועד החיזוי (31.12.2023) על 4.75%.

טכניקת הסבירות המרבית כרוכה בבחירת ערכים עבור הפרמטרים שממקסמים את הסיכוי (או הסבירות) להתרחשות הנתונים. כדי להמחיש את הטכניקה, נתחיל בדוגמה פשוטה מאוד. נניח שנדגום 10 מניות באקראי ביום מסוים ונגלה שהמחיר של אחת מהן ירד באותו יום בעוד שמחיריהן של התשע האחרות נשארו זהים או עלו. מהי אם כך ההערכה הטובה ביותר שלנו בדבר הסיכוי שמחיריהן של 10 המניות שלנו ירדו? התשובה הטבעית היא 10%. וזה בדיוק מה שטכניקת הסבירות המרבית הייתה נותנת רק באמצעות פתרון בעיית אופטימיזציה של פונקציה מתמטית (כלומר, על ידי גזירה של הפונקציה, השוואת הנגזרת הראשונה שלה לאפס וחילוץ הפרמטר שפותר את המשוואה – הוא שורש הפונקציה).

אז באמצעות טכניקת הסבירות המרבית קיבלתי שמהירות התסוגה לממוצע (k) שווה ל- 6.648%, שהריבית השנתית הממוצעת ארוכת הטווח שווה ל- 0.128% ושהתנודתיות (סטיית התקן) החודשית הנורמטיבית הצפויה של שיעורי השינויים בריבית שווה ל- 1.444%. מאחר וישנם 12 חודשים בשנה הרי שהתנודתיות השנתית הנורמטיבית הצפויה של שיעורי השינויים בריבית נאמדה על ידי ב- 5.004% לשנה.

כעת הרצתי מודל אקטוארי בשם מודל מונטה-קרלו (5,000 הרצות) שמבוסס על Mean-Reversion. נסביר כי מודל Monte Carlo מבוסס סדרות סימולציית משתני החלטה סטטיסטיים סטוכסטיים (5,000 מסלולים כפול 12 איטרציות בכל מסלול, כאשר גודל כל איטרציה 0.0833 שנים ובסך הכל 60,000 איטרציות), המבוססים על סטיות תקן ותוחלת משתני החלטה (Variable Factors) קריטיים במודל, על ידי חישוב איטרטיבי לריבית בנק ישראל לסוף שנת 2024 (ברזולוציה חודשית) ביחס למצבי טבע ותרחישים שונים.

מודל Monte Carlo שימש אותי הן לשם בחינת התפלגות התוצאות ביחס לתוחלת וסטיית התקן של משתנים פרוספקטיביים קריטיים לתוצאות החיזוי והן ביחס לתוצאות רטרוספקטיביות של הריביות. להלן התפלגות הריביות העתידיות החזויות של בנק ישראל לסוף שנת 2024:

Summary Statistics for BOINIR in 2024

Statistics		Percentile	
Minimum	1.38%	5%	2.84%
Maximum	9.54%	10%	3.15%
Mean	4.44%	15%	3.37%
Std Dev	1.04%	20%	3.55%
Variance	0.0001091	25%	3.70%
Skewness	0.3634250	30%	3.84%
Kurtosis	3.1921770	35%	3.99%
Median	4.38%	40%	4.12%
Mode	4.33%	45%	4.24%
Left X	2.84%	50%	4.38%
Left P	5%	55%	4.49%
Right X	6.26%	60%	4.63%
Right P	95%	65%	4.75%
Diff X	0	70%	4.94%
Diff P	90%	75%	5.12%
#Errors	0	80%	5.31%
Filter Min	Off	85%	5.53%
Filter Max	Off	90%	5.82%
#Filtered	0	95%	6.26%

מניתוח סימולציית מונטה קרלו עולה כי ריבית בנק ישראל בתום שנת 2024, בטווח של סטיית תקן אחת, צפויה "ליפול" בטווח שבין 3.40% לבין 5.48%.

אם נחליט שהאומד לתוחלת הצפויה של ריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 הוא ממוצע התפלגות הריביות העתידיות לעיל, אזי למעשה אנו צופים שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תעמוד על 4.44%. לחילופין, אם נקבע שהאומד לתוחלת הצפויה של ריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 הוא חציון התפלגות הריביות העתידיות לעיל, או אז למעשה אנו צופים שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תעמוד על 4.38%. ולחילופי חילופין, אם נבחר כאומד לתוחלת הצפויה של ריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 הוא שכיח התפלגות הריביות העתידיות לעיל, הרי אנו צופים שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תעמוד על 4.33%.

אז אלו הסתברויות מודל הסימולציה שלי מספק? המודל שלי קובע שקיימת הסתברות של 5% שריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 תהיה נמוכה או שווה ל- 2.84%. במילים אחרות, המודל שלי גורס כי קיים סיכוי של 95% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ- 2.84%. בנוסף, המודל שלי קובע שישנה הסתברות של 35% שריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 תהיה נמוכה או שווה ל- 3.99%. במילים אחרות, המודל שלי גורס כי קיים סיכוי של 65% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ- 3.99%.

עוד קובע המודל שלי שישנה הסתברות של 65% שריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 תהיה נמוכה או שווה ל- 4.75%. במילים אחרות, המודל שלי גורס כי קיים סיכוי של 35% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ- 4.75%. ולבסוף המודל שלי קובע גם שישנה הסתברות של 95% שריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 תהיה נמוכה או שווה ל- 6.26%. במילים אחרות, המודל שלי גורס כי קיים סיכוי של 5% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ- 6.26%. כך יש לפרש את יתר ההסתברויות הנקובות בטבלה לעיל.

מהתוצאות לעיל, אנו למדים שהמודל שלי מנבא ברמת ביטחון של 90% שריבית בנק ישראל בתום שנת 2024 "תיפול" בטווח שבין 2.84% לבין 6.36% (בתוחלת כ- 4.44%). כלומר, קיימת רמת מובהקות של 5% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה נמוכה יותר מ- 2.84% ורמת מובהקות נוספת של 5% שריבית בנק ישראל בסוף שנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ- 6.36%.