



ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר באקטואריה סיכוני אשראי היא התפלגות ברנולי

האקטואר רועי פולניצר מסביר מדוע ההתפלגות ברנולי היא אבן היסוד של אקטואריה סיכוני אשראי וכיצד היא מאפשרת למדוד ולהנהל סיכונים אשראי.

$$P(D = 1) = PD; \quad P(D = 0) = 1 - PD$$

זהו למעשה המודל הבסיסי ביותר בעולם סיכונים האשראי.

התפלגות ברנולי או התפלגות כן/לא

התפלגות ברנולי היא התפלגות בדידה בעלת שתי תוצאות אפשריות בלבד (למשל: עץ או פלי, הצלחה או כישלון, 0 או 1). למעשה, זהו מקרה פרטי של התפלגות בינומית עם ניסוי אחד בלבד, וניתן להשתמש בה כדי לדמות מצבי כן/לא או הצלחה/כישלון. התפלגות זו מהווה את אבן היסוד של התפלגויות מורכבות יותר. לדוגמה:

- **התפלגות בינומית** - התפלגות שסופרת x הצלחות בסדרה של n ניסיונות ברנולי בלתי תלויים, כאשר ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא קבועה ושווה ל- p .

- **התפלגות גיאומטרית** - התפלגות שסופרת x ניסיונות ברנולי בלתי תלויים עד להצלחה ראשונה, כולל הניסוי שבו הייתה ההצלחה הראשונה, כאשר ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא קבועה ושווה ל- p .

- **התפלגות בינומית שלילית** - התפלגות שסופרת x ניסיונות ברנולי בלתי תלויים עד להצלחה ה- r , כולל הניסוי שבו הייתה ההצלחה ה- r , כאשר ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא קבועה ושווה ל- p .

תנאי ההתפלגות

המבנים המתמטיים של התפלגות ברנולי הם כדלקמן:

$$P(x) = \begin{cases} 1-p & \text{for } x = 0 \\ p & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

$$P(x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

המוצג p

$$\sqrt{p(1-p)}$$

$$\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} = (\text{skewness})$$

$$\frac{6p^2-6p+1}{p(1-p)} = \text{הגבנויות העודפת}$$

ההסתברות להצלחה (p) היא הפרמטר היחיד של התפלגות ברנולי. בנוסף, חשוב לציין כי בהתפלגות ברנולי קיים ניסוי אחד בלבד, ולכן הערך המתקבל בסימולציה יכול להיות רק 0 או 1.

הקבלה לאקטואריה ביטוח חיים

הדמיון בין אקטואריה ביטוח חיים לבין אקטואריה סיכוני אשראי עמוק במיוחד.

אקטואריה ביטוח חיים	אקטואריה סיכוני אשראי
חי	סולבנטיות
מות	חול פירעון
הסתברות מוות	הסתברות חדלות פירעון
לוח תוחלות	טבלת חדלות פירעון
מצב סופג	מצב סופג

באקטואריה ביטוח חיים קיימות טבלאות תמותה לפי גיל, מין ולעיתים גם לפי מאפיינים נוספים (לאוס/מוצא, דת, מצב בריאות, סטטוס משפחתי וכו'). ההסתברות q_x בלוח החיים היא הסתברות מותנית למות במהלך השנה הקרובה בהינתן שהמבוטח הגיע בחיים לגיל x . באופן דומה, באקטואריה סיכוני אשראי אנו עוסקים בהסתברות המותנית (Intensity) לחדלות פירעון במהלך השנה הקרובה בהינתן שהלווה נותר סולבנטי עד תחילת אותה שנה.

הסתברות מותנית לעומת ההסתברות שולית

נניח כי ההסתברות לחדלות הפירעון השנתית של לווה מסוים היא

$$PD = 5\%$$

5%. כלומר, בכל שנה שבה הלווה עדיין סולבנטי, קיימת הסתברות מותנית (conditional probability) של 5% להגיע לחדלות פירעון במהלך השנה הקרובה. בדומה ללוחות התמותה, ממנה ניתן לגזור את ההסתברויות הבלתי מותנות.

ההסתברות השולית (marginal probability) להגיע לחדלות פירעון בשנה הראשונה היא $0.95^0 \times 0.05 = 5.00\%$. בעוד שההסתברות השולית להגיע לחדלות פירעון בשנה השנייה היא $0.95^1 \times 0.05 = 4.75\%$, ההסתברות השולית להגיע לחדלות פירעון בשנה השלישית היא $0.95^2 \times 0.05 = 4.51\%$ וכן הלאה. כך עוברים מהסתברות מותנית להסתברות שולית. בדומה ללוחות תמותה, ההסתברות המותנית השנתית נותרת קבועה על 5%, ברם ההסתברויות השוליות לחדלות פירעון בכל שנה הולכות וקטנות, משום שהן מוכפלות בהסתברות השרידות המצטברת עד אותה שנה.

אקטואריה מזוהה באופן מסורתי עם תחומי ביטוח החיים, ביטוח הפנסיה, ביטוח הבריאות והביטוח הכללי (האלמנטרי). עם זאת, בעשורים האחרונים התרחב תחום האקטואריה באופן משמעותי והוא כולל כיום גם את מדידתם, כימותם וניהולם של סיכונים פיננסיים. תחום זה מכונה "אקטואריה פיננסית" (Financial Actuarial Science). כתב מאמר זה טבע את המונח "אקטואריה פיננסית" הן במסגרת סדרת מאמרים שפרסם בכנת העת שטטנס בשנת 2015 והן במסגרת הקמת לשכת מעריכי השווי והאקטואריה הפיננסית בישראל (IAVFA). בסוף שנת 2014. בתוך תחום האקטואריה הפיננסית מצוי תת-תחום המכונה אקטואריה סיכוני אשראי (Credit Risk) (Actuarial Science), אשר מורכב מארבעה תחומי ידע מרכזיים: מימון כמותי, הנדסה פיננסית, תמחור אופציות וניהול סיכונים. אקטואריה סיכוני אשראי עוסקת במיפוי גורמי הסיכון (מימון כמותי) במידול ההתפתחות העתידית של גורמי הסיכון הפיננסיים (הנדסה פיננסית), בכימות ובמדידת הסיכונים הנובעים מהם (ניהול סיכונים), ובתמחור ובהערכת שוויים של מכשירים פיננסיים ונגזרים המשמשים לגידור אותם סיכונים (תמחור אופציות), הסתברות ואקטואריה. תחום זה עוסק במדידת הסיכונים הנובעים מכך שלווה, מפיק אג"ח, בנק, מוסד פיננסי או צד נגדי לעסקה פיננסית לא יוכלו לעמוד בהתחייבויותיהם הכספיות, כלומר, יגיעו למצב של חדלות פירעון (Default). למעשה, חלק ניכר מהמודלים המודרניים בתחום אקטואריה סיכוני אשראי מבוססים על רעיונות שמקורם באקטואריה ביטוח החיים. הדמיון אינו מקרי. כשם שתמותה היא אירוע חד פעמי שאין ממנו חזרה, כך גם חדלות פירעון נחשבת מבחינה תיאורית לאירוע חד פעמי שאין ממנו חזרה. בשני המקרים מדובר במה שמכונה בתהליכים סטוכסטיים "מצב סופג" (Absorbing State). מרגע שהמבוטח נפטר או שהלווה הגיע לחדלות פירעון, "המשחק נגמר". אם באקטואריה ביטוח חיים ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר היא ההתפלגות האקספוננציאלית, אז באקטואריה סיכוני אשראי ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר היא התפלגות ברנולי. הסיבה לכך פשוטה: אבן היסוד של כל מודל אשראי מודרני היא הסתברות חדלות הפירעון (PD) (Probability of Default), וזו אינה אלא הסתברות של משתנה ברנולי.

מהם סיכונים אשראי?

אקטואריה סיכוני אשראי מתמקדת בשלושה סוגי סיכון מרכזיים:

- ❖ **סיכון חדלות פירעון (Default Risk)** - זהו הסיכון שהלווה לא יעמוד בתשלומי הקרן או הריבית שהתחייב לשלם. דוגמאות לסיכון זה כוללות למשל, תכרה שאינה מסוגלת לפרוע את אגירות החוב שהנפקה, לחילופין בנק שאינו עומד בהתחייבויותיו או לחילופין חילופין משק בית שאינו מסוגל להחזיר הלוואה משכנתא. זהו סיכון האשראי הבסיסי והחשוב ביותר.

- ❖ **סיכון הגירת אשראי (Credit Migration Risk)** - גם אם הלווה טרם הגיע לחדלות פירעון, מצבו הפיננסי עלול להידרדר. כתוצאה מכך עלול לזרוק האשראי שלו לרדת: למשל מדירוג AAA לדירוג BBB- או לחילופין מדירוג BBB- לדירוג BB-. הורדת דירוג אשראי מובילה בדרך כלל לזרימה שווי אגירות החוב ולהגדלת עלות המימון של הלווה.

- ❖ **סיכון לפתיחת מרווחי אשראי (Credit Spread Risk)** - גם כאשר איכות האשראי (Credit Worthiness) של הלווה אינה משתנה, מרווחי האשראי בשוק עשויים להשתנות. כאשר המשקיעים דורשים פרמית סיכון גבוהה יותר, מרווחי האשראי נפתחים ושווי אגירות החוב יורד. זהו הסיכון החשוב החשוב ביותר בניהול תיקי אג"ח, בחברות ביטוח, בקרנות פנסיה ובנקים.

מדוע ההתפלגות ברנולי מתאימה לסיכונים אשראי?

התפלגות ברנולי היא ההתפלגות הפשוטה ביותר בתורת ההסתברות. היא מתארת ניסוי שבו קיימות שתי תוצאות אפשריות בלבד: הצלחה או כישלון. באקטואריה סיכוני אשראי מקובל לצורך המידול הסטטיסטי נהוג להגדיר לחדלות פירעון "הצלחה" בניסוי ברנולי, בעוד שסולבנטיות מוגדרת כ"כישלון".

$$D = \begin{cases} 1 & \text{חדלות פירעון} \\ 0 & \text{סולבנטיות} \end{cases}$$

כלומר, בכל נקודת זמן הלווה נמצא באחד משני מצבי עולם בלבד: סולבנטי או חדל פירעון. אם נסמן את הסתברות חדלות הפירעון השנתית ב- PD , נקבל:

$$D \sim \text{Bernoulli}(PD)$$

כאשר:

מהי ההסתברות לחדלות פירעון (PD)?

המושג החשוב ביותר באקטואריה סיכוני אשראי הוא ההסתברות לחדלות פירעון (PD) (Probability of Default), כלומר, ההסתברות שלווה יגיע לחדלות פירעון במהלך תקופת זמן נתונה. ה- PD הוא אבן היסוד של דירוגי אשראי, מודלי באזל (רגולציה בניהול סיכונים בבנקאות), מודל CreditMetrics לאמידת Credit VaR תחת סיכון הגירת אשראי ומודל KMV לאמידת Credit VaR תחת סיכון חדלות פירעון אשראי כמו גם לצורך עמידה בחוראות תקן דיווח כספי בינלאומי מספר 9 – מכשירים פיננסיים (IFRS 9). על פי האקטואר רועי פולניצר ה- PD הוא למעשה הפרמטר של משתנה ברנולי לניח יתרון לראות בהתפלגות ברנולי את אבן הבניין של אקטואריה סיכוני האשראי.

מהו Credit VaR?

בדומה ל- Market VaR באקטואריה סיכוני שוק, גם באקטואריה סיכוני אשראי קיים מדד סיכון מרכזי הנקרא Credit VaR. ה- Credit VaR מודד את ההפסד המקסימלי בתיק אשראי ברמת ביטחון נתונה ולאופק זמן נתון. להלן נוסחת ה- Credit VaR :

$$\text{Credit VaR} = L \cdot (1 - R) \cdot V(X, T, \rho)$$

כאשר L הוא שווי תיק אשראי (קרי, תיק עם ממכשיר חוב אחד), R הוא שיעור ההשבה ה- $V(X, T, \rho, PD)$ הוא שיעור חדלות הפירעון במקרה הגרוע ביותר עבור רמת הביטחון X , לאופק זמן נתון T עם פרמטר קורלציה קופולה של ρ והסתברות חדלות פירעון שנתית ממוצעת של PD , אשר פותח ע"י Vasicek במסגרת חברת KMV בשנת 1987. להלן הנוסחה:

$$V(X, T, \rho, PD) = N\left(\frac{N^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

נניח תיק אשראי בהיקף של 100 מיליון דולר, שלו הסתברות חדלות פירעון שנתית ממוצעת של 2%, שיעור השבה של 60% ומקדם מתאם אשראי של 10%. בהינתן רמת ביטחון של 99.9% ואופן זמן של שנתיים לתיק זה יש שיעור חדלות פירעון במקרה הגרוע ביותר של 0.128. לפיכך, ה- Credit VaR של תיק זה ברמת ביטחון של 99.9% לאופק של שנה נאמד בכ-5.13 מיליון דולר (100 מיליון דולר כפול 12.8% כפול 40%).

שיעור ההשבה (RR) והתפלגות ביתא

גם לאחר חדלות פירעון, הנושה בדרך כלל מצליח לגבות חלק מהחוב. חלק זה נקרא שיעור ההשבה (Recovery Rate – RR). מהחוב ההפסד בהינתן חדלות פירעון (Loss Given Default – LGD) מוגדר כ- $LGD = 1 - RR$. מאחר ששיעור ההשבה מוגבל תמיד בין 0% ל-100%, נהוג לעיתים קרובות למדל אותו באמצעות התפלגות ביתא. על כך בעוד שהתפלגות ברנולי משמשת למידול ההסתברות לחדלות פירעון, התפלגות ביתא משמשת למידול שיעור ההשבה בקרות חדלות הפירעון.

סיכום

אקטואריה סיכוני אשראי עוסקת במדידת הסיכונים הנובעים מחדלות פירעון, מהגירת דירוגי אשראי ומפתיחת מרווחי אשראי בשוק. בדומה לאקטואריה ביטוח חיים, גם כאן האירוע המרכזי הוא אירוע חד פעמי וסופי. הלווה נמצא באחד משני מצבי עולם בלבד: סולבנטי או חדל פירעון. משום כך, המשתנה האקראי הבסיסי ביותר בתחום הוא משתנה ברנולי, והפרמטר החשוב ביותר בהסתברות חדלות הפירעון (PD). כל המודלים המרכזיים בעולם סיכונים האשראי – החל מדירוגי אשראי, דרך מודלי באזל וכלה במודלים של Credit VaR (כמו CreditMetrics ו-KMV) – נשענים בסופו של דבר על ההסתברות הזו. לכן, בדיוק כפי שההתפלגות האקספוננציאלית עומדת בבסיס אקטואריה ביטוח החיים, התפלגות פואסון עומדת בבסיס אקטואריה הסיכונים הפיננסיים וההתפלגות הנורמלית עומדת בבסיס אקטואריה סיכוני שוק, כך גם התפלגות ברנולי מהווה את אבן היסוד של אקטואריה סיכוני האשראי. ראו ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר בתחום.

הכותב הוא אקטואר סיכוני אשראי מוסמך, לשעבר נשיא האיגוד הישראלי לאקטוארים (AIA) וכיום נשיא לשכת מעריכי השווי והאקטואריה הפיננסית בישראל (IAVFA), מחבר הספר הראשון באקטואריה מוסמך אי פעם בישראל ובעברית "המדריך לאקטוארים של ביטוח חיים", מומחה לאקטואריה, מסמך אקטואריה בישראל, בעל מקצוע מוערך בתחומי האקטואריה, מייסד של 2 איגודים אקטואריים מקצועיים מוכרים ובעלי מוניטין, קיבל מסגן ראש הממשלה ומשרת הממשל (בהסמכת מ"מ נשיאת בית המשפט העליון) מינוי לכהן כחבר בוועדה לבחירת אקטוארים מטעם בתי המשפט בתפקיד נציג איגוד אקטוארי מוכר בישראל, קיבל מהנהלת בתי המשפט מינוי לתפקיד מומחה מטעם בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה ונכלל ברשימת המומחים של בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה.