



קפוצ'ן! לאן? לדיפוזיה כמובן!

האקטואר רועי פולניצר מסביר מהו תהליך דיפוזיית הקפיצות של מרטון (JD), כיצד הוא מוסיף קפיצות אקראיות להתפתחות הרציפה המאפיינת GBM ומדוע תיקון רכיב הסחיפה בגין השפעת הקפיצות אינו הופך אותו לתהליך MR.

אג"ח ומרווחי CDS – הורדת דירוג, הפרת אמת מידה פיננסית, הסדר חוב או חדלות פירעון עשויים לגרום לשינוי חד במחיר האג"ח או במרווח האשראי.

סחורות חקלאיות ומתכות – בצורת, הצפה, מחלה, מגבלות יצוא, סגירת מכרה, שביתה או סנקציות עשויות ליצור קפיצה במחיר.

מכסות פליטת פחמן – שינוי רגולטורי או שינוי פתאומי בכמות המכסות עשויים לגרום לקפיצה במחיר.

אגרות חוב קטסטרופה (CAT Bonds) ומכשירים תלויי-ביטוח – רעידת אדמה, הוריקן, שריפה או מגפה הם אירועים בדידים המשנים בבת אחת את שווי המכשיר.

כיצד בוחרים את התהליך המתאים?

אין לבחור תהליך רק לפי סוג הנכס. העובדה שמדובר במניה אינה מוכיחה כי GBM הוא התהליך המתאים, והעובדה שמדובר במחיר סחורה אינה מוכיחה כי יש לבחור ב-MR. התנהגות הנכס עשויה להשתנות לאורך זמן: נכס שהתאים בעבר ל-GBM עשוי להתאפיין כיום בקפיצות תכופות ולהתאים יותר ל-JD.

במחקר אמפירי שערכתי על התהליך הסטוכסטי העומד מאחורי התנהגות מחיר הביטקוין בשנים 2021–2026, השוויית בין שלושה תהליכים מתחרים: MR, GBM ו-JD. ההשוואה בוצעה באמצעות אמידת הפרמטרים בשיטת הנראות המרבית (Maximum Likelihood Estimation – MLE) ובחינת ערך פונקציית הלוג-ליראות (Log-Likelihood), קריטריון המידע של אקאיקה (Akaike Information Criterion – AIC) וקריטריון המידע הבייסיאני (Bayesian Information Criterion – BIC).

תוצאות המחקר הצביעו על כך ש-JD התאים למחיר הביטקוין בתקופה שנבדקה טוב יותר מ-GBM ו-MR. אין להסיק מכך שכל מבצע קריפטוגרפי יתאים תמיד לאותו תהליך. המסקנה היא מתודולוגית: יש להשוות בין תהליכים מתחרים ולבחון את התאמתם לנתונים בפועל, ולא לבחור תהליך רק לפי סוג הנכס.

ליסיכום

JD אינו MR עם קפיצות ואינו תהליך שמוסיפים ל-GBM. זהו תהליך סטוכסטי שלם הכולל רכיב סחיפה, רכיב רעש ורכיב קפיצה. הוא שומר על ההתפתחות הרציפה המאפיינת GBM, אך מאפשר גם שינויים חדים במועדים אקראיים ובעוצמות אקראיות.

ההתאמה הנערכת לרכיב הסחיפה בגין ההשפעה הממוצעת של הקפיצות אינה יוצרת תסוגה לממוצע. לאחר קפיצה המחיר ממשיך להתפתח מן הרמה החדשה, ללא כוח המחזיר אותו לרמתו הקודמת. תפקידו של מעריך השווי הוא לזהות את המנגנון הכלכלי המתאר את הנכס ולבחון איזה מן התהליכים המתחרים מתאים בפועל לנתונים.

האקטואר רועי פולניצר הוא הבעלים ומעריך השווי הראשי של פירמת הערכות שווי "שווי פנימי – מעריכי שווי בלתי תלויים", וכן מייסד ונשיא לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA). "שווי פנימי" מסייעת ללקוחותיה לפתח וליישם מודלים מתקדמים הרוששים הבנה עמוקה בתהליכים סטוכסטיים, ידע בשיטות נומריות ושלטה ברמה גבוהה בכלים כגון Python ו-VBA. פולניצר מייצג לחברות בניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומים של הנדסה פיננסית, יישום מודל מונטה-קרלו, תהליכים סטוכסטיים ומתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות. הוא מחבר הספרים "המדריך למעריכי שווי תאגידים" ו"המדריך לאקטוארים של ביטוח חיים" ומחברם של למעלה מ-1,000 פרסומים.

ולדת לאורך השנה, אך השינויים מתרחשים באופן רציף. אין משמעות הדבר שמחיר המניה יהיה בעוד שנה 108 ש; הוא עשוי להיות 75 ש, 90 ש, 115 ש או 150 ש. כעת נניח כי הנתונים ההיסטוריים מצביעים על חצי קפיצה בשנה בממוצע, כלומר קפיצה אחת בכל שנתיים בממוצע. אין פירוש הדבר שקפיצה תתרחש בדיוק אחת לשנתיים. ייתכן שבמסלול מסוים לא תתרחש קפיצה במשך ארבע שנים, ואילו במסלול אחר יתרחשו שתי קפיצות באותה שנה. נניח שבאחד המסלולים מחיר המניה עלה בהדרגה מ-100 ש ל-104 ש. החברה מפרסמת במפתיע כי הניסוי הקלני המרכזי שלה נכשל, ומחיר המניה צונח מיד ב-25%, לכ-78 ש. לאחר הקפיצה המסלול אינו חוזר אוטומטית ל-104 ש, אלא ממשיך להתפתח מ-78 ש בהתאם לרכיב הסחיפה ולרכיב הרעש. במסלול אחר עשוי להתקבל אישור לתרופה והמחיר עשוי לקפוצ'ן דווקא כלפי מעלה. בסימולציה מונטה-קרלו יש לקבוע בכל מסלול אם התרחשה קפיצה, מתי התרחשה, מה היה כיוונה ומה היה גודלה. הפעלת הסימולציה אלפי פעמים יוצרת התפלגות שלמה של תוצאות אפשריות, הכוללת מסלולים ללא קפיצות לצד מסלולים שבהם התרחשו אירועים קיצוניים.

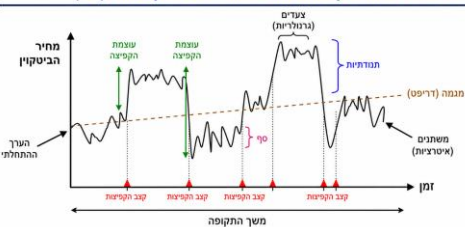
היכן משתמשים ב-JD?

נכסים ומשתנים המתאימים במיוחד ל-JD הם כאלה שמחירם נע בדרך כלל באופן רציף, אך חשוף לאירועים בדידים היוצרים שינוי חד, כגון:

- שערי חליפין** – בעיקר מטבעות של שווקים מתעוררים, מטבעות במשטר שער חליפין מנוהל ומטבעות החשופים להתערבות פתאומית של בנקים מרכזיים.
- מחירי אנרגיה** – נפט, גז טבעי וחשמל מושפעים ממלחמות, מסיקציות, מהשבתת מתקנים, ממזג אוויר קיצוני ומשינויים פתאומיים בהיצע.

מטבעות קריפטוגרפיים – ביטקוין ומטבעות נוספים מושפעים משינוי רגולציה, מפריצות, מקריסת זירות מסחר, מאישור מוצרים פיננסיים ומשינויים חדים בסנטימנט.

דוגמה להילוך מקרי (Random Walk) של מחיר הביטקוין באמצעות תהליך סטוכסטי מסוג דיפוזיית קפיצות (JD)



מניות ביוטכנולוגיה ותרופות – תוצאות ניסוי קליני, אישור או דחייה של תרופה והפסקת פיתוח עשויים לשנות את מחיר המניה בבת אחת.

חברות הזנק ופרייקטים התלויים באבני דרך – הבלחת ניסוי, קבלת פטנט, השלמת סבב גיוס, חתימה על חוזה גדול, קבלת היתר, גילוי משאב, זכייה במכרז או אישור רגולטורי עשויים ליצור קפיצה בשווי.

חברות החשופות לאירועים תאגידיים – הצעת רכש, מיזוג, פשיטת רגל, תביעה מהותית, חקירה רגולטורית, הפתעת רווח או החלפת הנהלה עשויים ליצור קפיצה במחיר המניה.

חברות חיפוש נפט, גז ומחצבים – גילוי מאגר, קידוח יבש, קבלת רישיון או ביטולו הם אירועים בדידים העשויים להקפיץ את שווי החברה.

מדידי מניות – משברים פיננסיים, מלחמות, מגפות והודעות מאקרוכלכליות חריגות עשויים לגרום לקפיצה במדד כולו.

מעריכי שווי, אקטוארים, מהנדסים פיננסיים ומנהלי סיכונים משתמשים בתהליכים סטוכסטיים כדי לתאר כיצד משתנים כלכליים ופיננסיים עשויים להתפתח בעתיד. במאמר הראשון בסדרה הוצגה תנועת בראון גיאומטרית (Geometric Brownian Motion – GBM), המשלבת רכיב סחיפה עם רכיב רעש אקראי. במאמר השני הוצג תהליך התסוגה לממוצע (MR – Mean-Reversion), המתאים למשתנים הנוטים לחזור לרמת שיווי משקל ארוכת טווח. שני התהליכים מניחים בדרך כלל כי המשתנה אינו עולה או יורד בהדרגה, אלא מזנק או צונח בתוך זמן קצר בקבוצת אירוע פתאומי. לשם תיאור התנהגות כזאת פיתח רוברט מרטון בשנת 1976 את תהליך דיפוזיית הקפיצות (JD – Jump-Diffusion).

מהו תהליך דיפוזיית הקפיצות של מרטון (JD)?

ה-JD הוא תהליך סטוכסטי שלם המשלב שלושה רכיבים: רכיב סחיפה, רכיב רעש ורכיב קפיצה. במשך רוב הזמן מחיר הנכס מתפתח באופן רציף באמצעות רכיב הסחיפה, המתאר את כיוון ההתפתחות הממוצע שלו, ורכיב הרעש, המתאר את התנודות האקראיות סביב כיוון זה. אולם במועדים מסוימים מתרחש אירוע בדיד הגורם לשינוי חד כלפי מעלה או כלפי מטה. רכיב הקפיצה מתאפיין בשני גורמים מרכזיים: תדירות הקפיצות וגודלן. תדירות הקפיצות מתארת כמה קפיצות צפויות בממוצע בתקופה מסוימת, ואילו גודל הקפיצה מתאר את עוצמת השינוי כאשר היא מתרחשת. אין פירוש הדבר שהקפיצות יתרחשו במרווחי זמן קבועים או שיהיו זהות בגודלן. הן מועד הקפיצה והן עוצמתה הם אקראיים.

שלושה רכיבים – אבל אין רכיב MR

ב-JD רכיב הסחיפה מותאם להשפעה הממוצעת הצפויה של הקפיצות. ההתאמה נועדה למנוע מצב שבו השפעת הקפיצות תיספר פעמיים: פעם אחת במסגרת השינוי הממוצע הצפוי במחיר ופעם נוספת בעת תרחיש הקפיצות עצמן. חשוב שלא לפרש התאמה זו ככוח של תסוגה לממוצע. בתהליך MR כיוון הסחיפה תלוי במיקומו של המשתנה ביחס לרמת שיווי המשקל: כאשר הוא נמצא מעליה, הסחיפה פועלת כלפי מטה, וכאשר הוא נמצא מתחתיה, היא פועלת כלפי מעלה. ב-JD אין רמת שיווי משקל ואין כוח המחזיר את המחיר אליה. לאחר קפיצה המחיר ממשיך להתפתח מן הרמה החדשה ואינו נמשך אוטומטית בחזרה לרמתו הקודמת. לכן JD אינו MR עם קפיצות.

GBM לעומת JD

GBM מניח כי מחיר הנכס מושפע מרכיב סחיפה ומרכיב רעש רציף. הוא מתאים בעיקר למשתנים שאינם מתאפיינים ברמת שיווי משקל שאליה הם נדרשים לחזור, כגון מחירי מניות, מדדי מניות ואף מדד המחירים לצרכן ברמתו. JD שומר על שני הרכיבים הללו ומוסיף להם רכיב קפיצה. רכיב הסחיפה אינו מוחלף ורכיב הרעש אינו נעלם. ההתפתחות הרציפה ממשיכה לפעול, אך לצידה נוסף מנגנון המאפשר למחיר לזנק או לצנוח בעקבות אירוע חריג. בכך יכול התהליך לתאר שינויים קיצוניים המתרחשים בשכירות גבוהה יותר מזו המשתמעת מ-GBM. מכאן שהביטוי "GBM עם JD" אינו מדויק. לא מוסיפים לתהליך GBM תהליך JD שלם, אלא מוסיפים לו רק רכיב קפיצה המבוסס על תהליך פואסון, והתהליך השלם המתקבל הוא ה-JD.

מסלול אחד אינו מספר את כל הסיפור

נניח שמחיר מניה מסוימת עומד כיום על 100 ש, תוחלת התשואה הצפויה שלה היא 8% בשנה וסטטית תתקן שלה היא 30%. לפי GBM, המחיר עשוי לעלות