



ההתפלגות הסטטיסטית ביותר באקטואריית ביטוח חיים היא ההתפלגות האקספוננציאלית

האקטואר רועי פולניצר מסביר כיצד ההתפלגות המעריכית מאפשרת לאמוד הסתברויות הישרדות ותמותה בביטוח חיים.

מדוע ההתפלגות האקספוננציאלית מתאימה לסיכון תמותה?

חישובים מסוג זה עומדים בבסיס תמחורן של פוליסות ביטוח חיים, קצבאות פנסיה, ביטוחי מנהלים ומוצרים אקטואריים נוספים.

הקשר בין ההתפלגות האקספוננציאלית ללוחות תמותה
בפועל, אקטוארים אינם מסתמכים בדרך כלל על התפלגות אקספוננציאלית טהורה לצורך תמחור פוליסות ביטוח חיים. הסיבה לכך היא שקצב התמותה של בני אדם אינו קבוע לאורך החיים.

אדם בן 20 ואדם בן 90 אינם חולקים אותו שיעור תמותה. לכן משתמשים בלוחות תמותה אמפיריים המבוססים על נתוני אוכלוסייה אמיתיים.

עם זאת, ניתן לראות בהתפלגות האקספוננציאלית מקרה פרטי של מודל הישרדות שבהם עוצמת התמותה קבועה. מודלים כגון Gompertz ו-Makeham מכלילים רעיון זה בכך שהם מאפשרים לעוצמת התמותה להשתנות עם הגיל.

עוצמת התמותה היא קצב התמותה המיידי של הפרט ברגע נתון, מותנה בכך ששרד עד אותו רגע (קרי, ההסתברות שהפרט ימות בתוך שנייה). כך למשל, **חוק דה-מואבר** גורס כי עוצמת התמותה (הסתברות תמותה רציפה) של אדם בגיל x כאשר גיל תום לוח החיים הוא ω (אומגה) היא:

$$\mu_x = \lambda_x = \frac{1}{\omega - x} \text{ for } 0 \leq x < \omega$$

בהינתן $\omega = 110$, הרי שקצב התמותה הרגעי (הגרסה הרציפה של הסתברות התמותה השנתית) של אדם בן 40 הוא 0.0142. בעוד שקצב התמותה הרגעי של אדם בן 80 הוא 0.0333. **בחוק דה-מואבר עוצמת התמותה אינה קבועה אלא גדלה עם הגיל ומתבררת לאינסוף כאשר הגיל מתקרב לגיל הסופי ω .**

חשיבות ההתפלגות האקספוננציאלית בהכשרת אקטוארים

כל סטודנט לאקטואריה פוגש את ההתפלגות האקספוננציאלית כבר בשלבים הראשונים של לימודיו. היא משמשת להמחשת מושגים מרכזיים כגון:

- זמן עד להתרחשות אירוע
 - עוצמת סיכון
 - הסתברויות הישרדות
 - פונקציות סיכון (Hazard Functions)
 - מודלי תמותה
 - תמחור ביטוחי חיים וקצבאות
- פשוטות המתמטית מאפשרת להבין את העקרונות הבסיסיים לפני המעבר למודלים מורכבים יותר.

סיכום

סיכון התמותה הוא הסיכון החשוב ביותר באקטואריית ביטוח חיים. כל מצור ביטוחי בתחום החיים נשען על הערכת ההסתברות לפטירת המבוטח ועל אומדן הזמן הצפוי עד להתרחשות אירוע זה. ההתפלגות האקספוננציאלית מספקת מסגרת מתמטית פשוטה, אלגנטית ואינטואיטיבית לתיאור הזמן עד לתמותה כאשר מניחים שקצב התמותה הוא קבוע.

למרות שבפרקטיקה המודרנית נעשה שימוש בלוחות תמותה ובמודלים מורכבים יותר המאפשרים לקצב התמותה להשתנות עם הגיל, ההתפלגות האקספוננציאלית נותרה אחת ההתפלגויות החשובות ביותר באקטואריית ביטוח חיים. היא מהווה את נקודת המוצא להבנת מודלי הישרדות, את הבסיס למושג עוצמת התמותה, ואת אחד הכלים המתמטיים המרכזיים שעליהם נבנתה האקטואריה המודרנית.

הכותב הוא אקטואר סיכוני חיים מוסמך, לשעבר נשיא האיגוד הישראלי לאקטוארים (IAA) וכיום נשיא לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA), מחבר הספר הראשון באקטואריה שפורסם אי פעם בישראל ובעברית "המדריך לאקטוארים בביטוח חיים", מומחה לאקטואריה, מסייע לאקטוארים בישראל, בעל מקצוע מוערך בתחומי האקטואריה השונים, מייסד של 2 איגודים אקטואריים מקצועיים מוכרים ובעלי מוניטין, קיבל מסגן ראש הממשלה ומשר המשפטים (בהשכמת מ"מ נשיאת בית המשפט העליון) מינוי לכהן כחבר בוועדה לבחירת אקטוארים מטעם בתי המשפט בתפקיד נציג איגוד אקטוארי מוכר בישראל, קיבל מהנהלת בתי המשפט מינוי לתפקיד מומחה מטעם בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה ונכלל ברישימת המומחים של בתי המשפט בתחום המומחיות אקטואריה.

הסיבה המרכזית לכך שההתפלגות האקספוננציאלית משמשת מודל בסיסי באקטואריית ביטוח חיים נעוצה בכך שהיא מתארת באופן טבעי אירועים המתרחשים באופן אקראי לאורך זמן. נניח כי אנו בוחנים אוכלוסייה גדולה של אנשים בעלי מאפיינים דומים. אם נניח שקצב התמותה של כל אחד מהם קבוע לאורך תקופת הבדיקה, אזי הזמן עד לתמותה של כל פרט עשוי להיות מתואר באמצעות ההתפלגות האקספוננציאלית. הנחה זו סבירה רק בטווחי זמן קצרים או לצורכי המחשה תאורטית. במצב כזה ניתן לחשב בקלות:

- הסתברות לשרוד עד גיל מסוים
- הסתברות לתמותה במהלך תקופה נתונה
- תוחלת החיים הצפויה
- הערך הנוכחי של התחייבויות ביטוחיות

נעיר כי מדובר בכלים מרכזיים בכל תמחור אקטוארי.

תכונת חוסר הזיכרון

אחת התכונות המעניינות ביותר של ההתפלגות האקספוננציאלית היא תכונת "חוסר הזיכרון" (Memoryless). משמעותה היא שההסתברות לשרוד תקופה נוספת אינה תלויה במשך הזמן שכבר חלף. לדוגמה, אם אדם שרד עשר שנים מאז רכישת פוליסת הביטוח, ההסתברות שיעבור תמותה בשנה הקרובה זהה להסתברות שהייתה קיימת בתחילת התקופה, כל עוד קצב התמותה נותר קבוע. מבחינה מתמטית:

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

הנוסחה לעיל אומרת שההסתברות שאדם מסוים יחיה $t + s$ שנים מותנה בכך שהוא חי כבר s שנים שווה להסתברות שאותו אדם יחיה t שנים. זוהי תכונה ייחודית להתפלגות האקספוננציאלית. ברם, במציאות שיעורי התמותה של בני אדם משתנים עם הגיל ולכן הנחת חוסר הזיכרון אינה מתקיימת באופן מלא, אך מבחינה תיאורטית מדובר בתכונה חשובה המאפשרת בניית מודלים פשוטים וברורים.

תוחלת החיים במודל האקספוננציאלי

אחד היתרונות המרכזיים של ההתפלגות האקספוננציאלית הוא פשוטותה. תוחלת החיים עד להתרחשות האירוע שווה ל:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

לדוגמה, אם קצב התמותה השנתי הוא 2%, הרי ש- $\lambda = 0.02$. משכך, תירת תוחלת החיים עד לתמותה, לפי מודל פשוט זה תהיה 50 שנה ($1 / 0.02 = 50$). אולם אין פירוש הדבר ש-50% מהמבוטחים ישרדו 50 שנה. למעשה:

$$S(50) = e^{-0.02 \cdot 50} = 36.79\%$$

כלומר, רק כ-36.8% מהמבוטחים צפויים לשרוד 50 שנים נוספות, אף שתוחלת החיים היא 50 שנה. אין פירוש הדבר שכל אדם יחיה בדיוק 50 שנים נוספות, אלא שמדובר בממוצע סטטיסטי בלבד.

חישוב ההסתברויות הישרדות

אחת המשימות המרכזיות של האקטואר היא חישוב ההסתברויות הישרדות. בהתפלגות האקספוננציאלית פונקציית ההישרדות היא:

$$S(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

באמצעות פונקציה זו ניתן לחשב את ההסתברות שמבוטח ישרוד מעבר לפרק זמן מסוים. לדוגמה, אם קצב התמותה הוא 1% בשנה, אז ההסתברות לשרוד 10 שנים נוספות היא $e^{-0.01 \cdot 10} = 90.5\%$. כלומר כ-90.5%. נניח כעת כי קצב התמותה השנתי של קבוצת מבוטחים מסוימת הוא $\lambda = 0.02$, כלומר, עוצמת התמותה השנתית היא 2%. פונקציית ההישרדות היא:

$$S(t) = e^{-0.02t}$$

לפיכך:

$$S(10) = e^{-0.02 \cdot 10} = 81.87\%$$

ההסתברות לשרוד 20 שנים נוספות היא:

$$S(20) = e^{-0.02 \cdot 20} = 67.03\%$$

ההסתברות לשרוד 30 שנים נוספות היא:

$$S(30) = e^{-0.02 \cdot 30} = 54.88\%$$

וההסתברות לשרוד 50 שנים נוספות היא:

$$S(50) = e^{-0.02 \cdot 50} = 36.79\%$$

ניתן לראות כי ככל שחולף הזמן, ההסתברות לשרוד תקופות ארוכות נוספות הולכת ופוחתת באופן אקספוננציאלי. התנהגות זו היא שמאפשרת לאקטוארים לחשב את הערך הנוכחי של התחייבויות ביטוח חיים, קצבאות ומוצרים פנסיה.

אקטואריית ביטוח חיים היא תחום העוסק במדידה, הערכה וניהול של סיכונים הקשורים לחיי אדם. חברות ביטוח חיים, קרנות פנסיה וגופים פיננסיים אחרים נדרשים להעריך את ההסתברות להתרחשותם של סיכונים חיים המשפיעים על התחייבויותיהם הכספיות, כגון סיכון תמותה או סיכון שרידות מעבר לגיל מסוים. מבין כלל הסיכונים הללו, הסיכון המרכזי והבסיסי ביותר הוא סיכון התמותה – הסיכון לכך שמבוטח ימות במהלך תקופת הביטוח.

מאחר שכל מוצרי ביטוח החיים נשענים במישרין או בעקיפין על הערכת ההסתברות התמותה של המבוטח, נדרשת מסגרת סטטיסטית שתאפשר לאמוד את מועד התרחשותו של אירוע תמותה. אחת ההתפלגויות החשובות והבסיסיות ביותר לצורך זה היא ההתפלגות האקספוננציאלית (Exponential Distribution, התפלגות מעריכית).

למרות שהמודלים האקטואריים המודרניים מבוססים בדרך כלל על חוקי תמותה מורכבים יותר, ההתפלגות האקספוננציאלית מהווה את אבן הבניין התאורטית הבסיסית ביותר להבנת מודלי תמותה והישרדות.

סיכון התמותה – הסיכון המרכזי בביטוח חיים

כאשר חברת ביטוח מנפיקה פוליסת ביטוח חיים, היא לוקחת על עצמה אחריות לשלם סכום מסוים למוטבים במקרה שהמבוטח ילך לעולמו במהלך תקופת הביטוח. גובה הפרמיה שהחברה גובה מהמבוטח תלוי במידה רבה בהסתברות שהשולם הבטיחותי אכן יירשד.

לדוגמה, אם שני אנשים מבקשים לרכוש פוליסת ביטוח חיים זהה, אך האחד בן 30 והשני בן 80, ברור שההסתברות לפטירתו של המבוטח המבוגר גבוהה יותר. בהתאם לכך, גם הפרמיה שתצטרף ממנו תהיה גבוהה יותר.

מנקודת מבט אקטוארית, השאלה המרכזית היא: מהו הזמן הצפוי עד לפטירתו של אדם מסוים? או במונחים סטטיסטיים: כיצד מתפלג המשתנה האקראי המתאר את הזמן עד להתרחשות אירוע התמותה? זוהי בדיוק השאלה שעליה מנסה לענות ההתפלגות האקספוננציאלית.

התפלגות אקספוננציאלית

ההתפלגות האקספוננציאלית נמצאת בשימוש נרחב כדי לתאר אירועים המתרחשים מחדש בנקודות זמן אקראיות, כגון הזמן שבין תקלות של ציוד אלקטרוני או הזמן שבין הגעות לעמדת שירות. היא קשורה להתפלגות פואסון, המתארת את מספר ההתרחשויות של אירוע במרווח זמן נתון.

מאפיין חשוב של ההתפלגות האקספוננציאלית הוא תכונת "חוסר הזיכרון" (Memoryless) משמעותה היא שאורך החיים העתידי של אובייקט נתון הוא בעל אותה התפלגות ללא קשר למשך הזמן שבו הוא כבר התקיים. במילים אחרות, משך הזמן שכבר חלף ללא התרחשות האירוע אינו משנה את ההתפלגות של משך הזמן הנותר עד להתרחשותו.

תנאי ההתפלגות

התנאי העומד בבסיס ההתפלגות האקספוננציאלית הוא:

- ההתפלגות האקספוננציאלית מתארת את משך הזמן שבין התרחשויות.
- המבנים המתמטיים של ההתפלגות האקספוננציאלית הם כדלקמן:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ for } x \geq 0; \lambda > 0$$

- הממוצע = $\frac{1}{\lambda}$
- סטיית התקן = $\frac{1}{\lambda}$
- הא-סימטריה (skewness) = 2 (ערך זה תקף לגבי כל ערך של λ).
- הגבנויות העודפת (Excess kurtosis) = 6 (ערך זה תקף לגבי כל ערך של λ).
- קצב ההתרחשות של האירוע (λ) הוא הפרמטר היחיד שמגדיר את ההתפלגות.
- x מייצג את הזמן שחלף.
- שקצב ההתרחשות של האירוע $0 < \lambda$.

במקרה של ביטוח חיים, האירוע הנבחן הוא פטירת המבוטח, ולכן λ מייצג את קצב התמותה. ככל שקצב התמותה גבוה יותר, כך ההסתברות שהאירוע יתרחש בזמן קצר יותר גדלה.