



אמידת תנודתיות בשווקים פיננסיים – מאמר 2: מודל הממוצע הנע המשוקלל אקספוננציאלי (EWMA)

האקטואר **רועי פולניצר** מציג את מודל הממוצע הנע המשוקלל אקספוננציאלי (EWMA) ואת יישומו באמידת תנודתיות בשוקי ההון.

תוחלת התשואות הפיננסיות בטווח קצר קטנה בדרך כלל ביחס לתנודתיות, ולכן השפעתה על אומדן השונות זניחה. להלן נוסחת ה-EWMA של הביטקוין:

$$\sigma_{B,t}^2 = \lambda \sigma_{B,t-1}^2 + (1 - \lambda) u_{B,t-1}^2$$

$$\lambda = 0.8147$$

כאשר $\sigma_{B,t}$ זו סטיית התקן של הביטקוין בשבוע t ו- $u_{B,t}$ היא תשואת הביטקוין בשבוע t . סטיית התקן ההיסטורית השבועית של הביטקוין בהתבסס על התשואות השבועיות שלו מה-2 בינואר 2020 ועד ל-30 באפריל 2026 נאמדה ב-9.33% לשבוע. תחת הנחת 52 שבועות מסחר בשנה, סטיית התקן ההיסטורית השנתית (שבועית בחישוב שנת) של הביטקוין נאמדה ב-67.30% לשנה. כעת נבדוק מהי סטיית התקן של הביטקוין לאותה תקופה באמצעות מודל EWMA, תחת ההנחה שתוחלת התשואות היא אפס. סטיית התקן EWMA השבועית של הביטקוין בהתבסס על התשואות השבועיות שלו מה-2 בינואר 2020 ועד ל-30 באפריל 2026 נאמדה ב-5.87% לשבוע. תחת הנחת 52 שבועות מסחר בשנה, סטיית התקן EWMA השנתית (שבועית בחישוב שנת) של הביטקוין נאמדה ב-42.30% לשנה. בחישוב זה, התשואה השבועית האחרונה (שיעור השינוי במחיר הביטקוין בין ה-23 באפריל 2026 ל-30 באפריל 2026 שנאמד ב-2.57%) קיבלה לבדה משקל של 18.53% קיבלה לבדה משקל של 18.53%, בעוד שכל יתר 329 התשואות חולקות ביניהן את יתרת המשקל (81.47%) באופן מעריכי. כאמור נכון ל-30 באפריל 2026 קיבלנו שסטיית התקן EWMA של הביטקוין נאמדה ב-5.87% לשבוע (קרי, 42.30% לשנה). נניח $\lambda = 0.8147$ וכאמור סטיית התקן השבועית של הביטקוין היא 5.87% לשבוע, ובהינתן שבמהלך השבוע שבין ה-30 באפריל 2026 ל-7 במאי 2026 התשואה השבועית של הביטקוין הייתה 4.86%, הבה נחשב את סטיית התקן החדשה.

$$\sigma_{n-1}^2 = 0.00344$$

$$u_{n-1}^2 = 0.0486^2 = 0.00236$$

אם ניצוק את הנתונים הללו לתוך נוסחת EWMA נקבל:

$$\sigma_n^2 = 0.8174 \cdot 0.00344 + 0.1853 \cdot 0.00236$$

$$\sigma_n^2 = 0.00324$$

כלומר סטיית התקן EWMA השבועית החדשה של הביטקוין היא $\sqrt{0.00324}$ או 5.69% לשבוע. תחת הנחת 52 שבועות מסחר בשנה, סטיית התקן EWMA השנתית (שבועית בחישוב שנת) של הביטקוין נאמדה ב-41.05% לשנה. אז למה סטיית התקן החדשה ירדה? מאחר שהתשואה השבועית החדשה (4.86%) הייתה נמוכה יותר מהתנודתיות שנאמדה בשבוע הקודם (5.87%), ולכן אומדן התנודתיות ירד מ-5.87% לשבוע ל-5.69% לשבוע.

סיכום

מודל EWMA מגיב במהירות יחסית לשינויים עדכניים בתנודתיות, תוך מתן משקל גבוה יותר לתצפיות האחרונות ומשקל הולך ופוחת לתצפיות ישנות. מסיבה זו הוא הפך לאחד המודלים המקובלים ביותר במדידת סיכון פיננסי ובחישוב הערך הנתון בסיכון (VaR).

כותב מאמר זה מומחה בינלאומי לניהול סיכונים פיננסיים (FRM) מוסמך על ידי האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP) בארה"ב, בעל תארים מתקדמים בהערכות שווי וניהול סיכונים (BA ו-MBA), עם ניסיון רב בפיתוח, יישום ותיקוף מודלים כמותיים בתחומי המימון, האופציות, ניהול הסיכונים וההנדסה הפיננסית, בעל הבנה עמוקה בתהליכים סטוכסטיים, ידע בשיטות נומריות ושלילת ברמה גבוהה בכלים כגון VBA, Excel, Python. (שפת התכנות המובנית באקסל).

$$\sigma_n^2 = 0.00013$$

לפיכך, אומדן התנודתיות, σ_n , עבור יום n הוא $\sqrt{0.00013}$ או 1.14% ליום. שימו לב שהערך הצפוי (התוחלת) של u_{n-1}^2 שווה ל- σ_{n-1}^2 , כלומר, ל-0.0001.

בדוגמה זו הערך בפועל של u_{n-1}^2 (0.0004) גדול יותר מהתוחלת (0.0001), ולכן אומדן התנודתיות שלנו עלה. חשוב להבין שאילו הערך בפועל של u_{n-1}^2 היה קטן יותר מהערך הצפוי שלו, אזי האומדן שלנו לתנודתיות היה יורד.

יתרונות מודל EWMA

לגישת EWMA יתרון חשוב בכך שהיא דורשת לאסוף יחסית מעט מאוד נתונים. בכל רגע נתון צריך לדעת רק את האומדן הנוכחי של השונות ואת התצפית העדכנית ביותר של ערך השוק של משתנה השוק. כאשר מתקבלת תצפית חדשה על משתנה השוק, שיעור השינוי היומי החדש מחושב ונוסחת EWMA משמשת לעדכון אומדן השונות. לאחר מכן ניתן למחוק את אומדן השונות הישן ואת ערך השוק הישן.

גישת EWMA נועדה לעקוב אחר שינויים בתנודתיות. נניח שביום $n-1$ ה- n התרחש שינוי חד במיוחד בשוק, ולכן u_{n-1}^2 הוא גדול. על פי נוסחת EWMA, הדבר יגרום לעלייה באומדן התנודתיות הנוכחית. ערכו של הפרמטר λ קובע באיזה מהירות יגיב אומדן התנודתיות למידע החדש. ערך נמוך של λ (קרי, קרוב ל-0) מוביל לכך שמשקל גדול יותר ניתן ל- u_{n-1}^2 , כאשר מחשבים את σ_n^2 . במקרה שכזה, נוסחת EWMA מייצרת אומדני תנודתיות שעבור ימים עוקבים יהיו מאוד תנודתיים. ערך גבוה של λ (קרי, קרוב ל-1) מייצר אומדני תנודתיות יומית שמגיבים לאט יחסית למידע חדש המתקבל משיעור השינוי היומי.

מסד הנתונים של חברת RiskMetrics שפותח במקור על ידי בנק ההשקעות J.P. Morgan והופץ לציבור בשנת 1994, עושה שימוש במודל EWMA עם $\lambda = 0.94$ עבור עדכון אומדני תנודתיות יומיים (וב- $\lambda = 0.97$ עבור עדכון אומדני תנודתיות חודשיים). RiskMetrics מצאה כי עבור מגוון רחב של משתני שוק, ערך זה של λ מספק תחזיות של השונות הקרובות ביותר לשונות שהתממשה בפועל. השונות שהתממשה ביום מסוים חושבה כממוצע פשוט של ערכי ה- u_i^2 במהלך 25 ימי המסחר שלאחר אותו יום. פשוט של ערכי ה- u_i^2 במהלך 25 ימי המסחר שלאחר אותו יום.

יישום מודל EWMA על תשואות הביטקוין

הבה ונחשב את סטיית התקן השנתית σ_B של הביטקוין במסגרת מודל של (EWMA) Exponentially Weighted Moving Average עם מקדם דעיכה של 0.8147. מקדם הדעיכה λ נאמד באמצעות שיטת הנראות המרבית (Maximum Likelihood Estimation) על התשואה השבועית של הביטקוין בתקופה מה-2 בינואר 2020 ועד ל-30 באפריל 2026 (330 תשואות שבועיות על פני 331 שבועות).

כעת נחשב את סטיית התקן של הביטקוין החל מה-2 בינואר 2020 ועד ל-30 באפריל 2026, כאשר משקלה של תצפית ישנה יותר של התשואה דועך בחישוב סטיית התקן באופן מעריכי. בחישוב EWMA מקובל להניח שתוחלת התשואות היא אפס (כלומר במקום לחשב את ממוצע מוחלק של ריבועי הסטיות של התשואות השבועיות מתוחלת התשואות המוחלקת, במודל EWMA מחשבים את ממוצע ריבועי התשואות המוחלק ללבד). הנחה זו מקובלת במודל EWMA משום

מודל הממוצע הנע המשוקלל אקספוננציאלי (Exponentially Weighted Moving Average – EWMA) הוא מקרה פרטי של המודל:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

שבו המשקלים α_i דועכים באופן אקספוננציאלי ככל שחוזרים אחורה בזמן. באופן יותר ספציפי, $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$, כאשר λ הוא קבוע שערכו בין 0 ל-1. מתברר כי שיטת שקלול זו מובילה לנוסחה פשוטה במיוחד לעדכון אומדן התנודתיות, שהיא נוסחת EWMA:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

אומדן התנודתיות, σ_n , של משתנה שוק מסוים עבור יום n (המחושב בסוף יום $n-1$) מחושב על בסיס σ_{n-1} (האומדן שחושב בסוף יום $n-2$) של התנודתיות עבור יום $n-1$ ו- u_{n-1} (שיעור השינוי העדכני ביותר של משתנה השוק). כדי להבין מדוע המשוואה לעיל אכן מייצרת משקלים שדועכים בצורה אקספוננציאלית, נציב במקום σ_{n-1}^2 את הביטוי הבא:

$$\sigma_n^2 = \lambda [\lambda \sigma_{n-2}^2 + (1 - \lambda) u_{n-2}^2] + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

או:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{n-2}^2$$

באופן דומה נציב במקום σ_{n-2}^2 את הביטוי הבא:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3 \sigma_{n-3}^2$$

ובהמשך:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2$$

עבור m גדול מספיק, האיבר האחרון $\lambda^m \sigma_{n-m}^2$ נעשה נעשה קטן דיו כך שניתן להזניחו. לכן מתקבלת המשוואה:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

כאשר

$$\alpha_i = (1 - \lambda) \lambda^{i-1}$$

משקלים המיוחסים לתשואות ההיסטוריות דועכים באופן מעריכי בקצב λ ככל שאנחנו הולכים אחורה בזמן. כל משקל הוא λ פעמים המשקל הקודם.

דוגמה מספרית

נניח ש- $\lambda = 0.90$ והתנודתיות הנאמדת עבור משתנה שוק מסוים עבור יום $n-1$ היא 1% ליום, ובמהלך יום n משתנה השוק עלה ב-2%. כלומר:

$$\sigma_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$$

$$u_{n-1}^2 = 0.02^2 = 0.0004$$

אם ניצוק את הנתונים הללו לתוך נוסחת EWMA נקבל ש-:

$$\sigma_n^2 = 0.90 \cdot 0.0001 + (1 - 0.90) \cdot 0.0004$$