תיקוף מודל ה- CAPM באמצעות גישת Fama-MacBeth (1974)

האקטואר רועי פולניצר, שהוסמך על-ידי האיגוד הישראלי לאקטוארים (PDSIA), מסביר כיצד ניתן לתקף את מודל ה- SML (מודל ה- CAPM) על ידי גישתם של Fama-MacBeth (1974).

בכתבה זו אציג תרגיל מתוך מבחן ההסמכה שעשיתי (ועברתי בהצלחה כמובן) בשנת 2019 באגודה ישראלית בתחום האקטואריה, הקרויה PDSIA (בעברית: **"האיגוד הישראלי לאקטוארים"**). התרגיל עוסק בניסיון המחקרי שבוצע ע"י Fama-MacBeth (1974) לתיקוף מודל ה- CAPM בגישה ייחודית.

גישת Fama-MacBeth (1974)

בשוק הון 100 נכסים בעלי סיכון ותשואה. נניח כי ברשותינו הנתונים החודשיים הבאים החל 1980 ועד דצמבר 2003 עבור אותם 100 נכסים:

K_i – התשואה החודשית של כל מניה i.

K_M – התשואה החודשית של תיק השוק.

F – פרמיית הסיכון החודשית על רגישות לשער חליפין.

K_{RZ} - התשואה החודשית של נכס ללא סיכון שוק, כלומר, $\beta=0$.

β_{Mi} – הרגישות של נכס i לתיק השוק.

β_{Fi} – הרגישות של נכס i לשער חליפין.

Vi - גודל הפירמה i.

בתרגיל שניתן לי במבחן ההסמכה, בחלק הראשון של השאלה, נתבקשתי לתאר כיצד הייתי מתקף את מודל ה- SML על פי גישתם של Fama - MacBeth (1974), תוך ציון הנחות מודל SML שנבדקו וכיצד הם עשו זאת. נתבקשתי לרשום את כל השלבים לחישוב באופן מפורט עם הסברים מתאימים, ולהציג משוואה פרמטרית.

להלן הפתרון שלי

FAMA-MACBETH 1974

1. לבדוק את קו ה- SML
2. ע"י בדיקה של התשואה עפ"י נתונים היסטוריים

השלבים

3. לקחת את כל הנכסים בין השנים 1980-1983.
4. תיק השוק לפי ממוצע של מניות למרות שבמקרה זה יותר נכון לקחת את נתוני תיק השוק הקיימים.
5. לשנים שנלקחו, אמידת β לכל מניה ודירוג המניות עפ"י ה- β-ות
6. לחלק את המניות ל-20 תיקים (כל תיק 5 מניות עפ"י הדרוג של ה- β-ות)
7. לכל תיק לאמוד את ה- β בשנים 1984-1988.
8. בין השנים 1989-1992 לקחת תשואה חודשית של התיקים ובדיקה מול ה-SML, כאשר בדיקת הרגרסיה היא:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1 \cdot \hat{\beta}_P + \varepsilon_{P,J89}$$

כאשר:

➢ $R_{P,J89}$ – התשואה בשנת 1989 לתיק P מסוים (מתוך 20 התיקים).

➢ a_0 - החותך של הרגרסיה

➢ a_1 - מקדם ה- $\hat{\beta}$ של התיק בשנים 1984-1988 (לפי תשואות חודשיות)

➢ $\varepsilon_{P,J89}$ - "רעש לבן" (סטיות שלא ניתן לצפות אותן מראש).

9. בתום התהליך הזה, לחזור על התהליך לשנים נוספות (כאשר כל פעם מחדש דרוג של הנתונים).
10. ביצוע בדיקת רגרסיה נוספת:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1\hat{\beta}_P + a_2\hat{\beta}^2{}_P \ + \varepsilon_{P,J89}$$

בדיקת הרגרסיה הנוספת נועדה לוודא שה- SML אכן מתקיים – שהתשואה קשורה ליניארית ל- β.

11. הסיכון הרלוונטי – הסיכון שאינו ניתן לפיזור. כוון שהסיכון הרלוונטי למניה הוא זה שלא ניתן לפיזור, יש לבדוק האם קיים קשר בין התשואה לבין ה"רעש הלבן" (שהוא הסיכון שניתן לפיזור). אם מתקבל קשר מובהק מבדיקה זו, למעשה תתקבל סטייה במודל

$$RV_P = \frac{\sum_{i=1}^{M}\sigma^2(\varepsilon_j)}{M}$$

עבור כל תיק למצוא את הסיכון הממוצע שלו (עפ"י M הנכסים שכולל התיק).

12. הרצת רגרסיה נוספת:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1\hat{\beta}_P + a_2\hat{\beta}^2{}_P \ + a_3 RV_P + \varepsilon_{P,J89}$$

ההשערות לגבי המודל הן:

➢ a_0 - שווה או גדול מ- Rf.

➢ a_1 - חיובי (עפ"י דרישת ה- SML).

➢ a_2 - שווה לאפס, לפי SML הקשר ל- β הוא ליניארי.

➢ a_3 - שווה לאפס, כוון שהתשואה אינה תלויה בסיכון שניתן לפיזור.

בחלק השני של השאלה, נתבקשתי לתאר משוואה פרמטרית למודל רב פקטורי (MULTIFACTOR MODEL) הכולל את תיק שוק ופרמיית סיכון בגין שער חליפין.

נגדיר:

F_1 - תיק שוק.

F_2 - שער חליפין.

R_f – ריבית חסרת סיכון.

$$E(R_P) = 5\% + \beta_{F1}*(E_{F1}- R_f) + \beta_{F2}*(E_{F2}- R_f)$$

בחלק האחרון של השאלה, נתבקשתי תאר כיצד ניתן לבדוק את המודל הרב פקטורי שהצעתי בחלק השני, על פי גישתם של Fama-MacBeth (1974), תוך ציון הנחות המודל שאותן אני בודק וכיצד אעשה זאת.

השלבים:

1. לקחת את כל הנכסים בין השנים 1980-1983.
2. תיק השוק לפי ממוצע של מניות למרות שבמקרה זה יותר נכון לקחת את נתוני תיק השוק הקיימים.
3. לשנים שנלקחו, אמידת β לכל מניה ודירוג המניות עפ"י ה- β-ות
4. לחלק את המניות ל-20 תיקים (כל תיק 5 מניות עפ"י הדרוג של ה- β-ות)
5. לכל תיק לאמוד את ה- β בשנים 1984-1988.
6. בין השנים 1989-1992 לקחת תשואה חודשית של התיקים ובדיקה מול המודל, כאשר בדיקת הרגרסיה היא:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1 \cdot \hat{\beta}_{F1} + a_2 \cdot \hat{\beta}_{F2} + \varepsilon_{P,J89}$$

כאשר:

➢ $R_{P,J89}$ – התשואה בשנת 1989 לתיק P מסוים (מתוך 20 התיקים).

➢ a_0 - החותך של הרגרסיה

➢ a_1 - מקדם ה- $\hat{\beta}$ של התיק בשנים 1984-1988 לתיק השוק (לפי תשואות חודשיות)

➢ a_2 - מקדם ה- $\hat{\beta}$ של התיק בשנים 1984-1988 לשער חליפין (לפי תשואות חודשיות)

➢ $\varepsilon_{P,J89}$ - "רעש לבן" (סטיות שלא ניתן לצפות אותן מראש).

7. בתום התהליך הזה, לחזור על התהליך לשנים נוספות (כאשר כל פעם מחדש דרוג של הנתונים).
8. ביצוע בדיקת רגרסיה נוספת:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1 \cdot \hat{\beta}_{F1} + a_2 \cdot \hat{\beta}_{F2} + +a_3\hat{\beta}^2{}_{F1} \ + a_4\hat{\beta}^2{}_{F2} \ + \varepsilon_{P,J89}$$

בדיקת הרגרסיה הנוספת נועדה לוודא שה-SML אכן מתקיים – שהתשואה קשורה ליניארית ל- β.

7. הסיכון הרלוונטי – הסיכון שאינו ניתן לפיזור. כוון שהסיכון הרלוונטי למניה הוא זה שלא ניתן לפיזור, יש לבדוק האם קיים קשר בין התשואה לבין ה"רעש הלבן" (שהוא הסיכון שניתן לפיזור). אם מתקבל קשר מובהק מבדיקה זו, למעשה תתקבל סטייה במודל

$$RV_P = \frac{\sum_{i=1}^{M}\sigma^2(\varepsilon_j)}{M}$$

עבור כל תיק למצוא את הסיכון הממוצע שלו (עפ"י M הנכסים שכולל התיק).

8. הרצת רגרסיה נוספת:

$$R_{P,J89} = a_0 + a_1 \cdot \hat{\beta}_{F1} + a_2 \cdot \hat{\beta}_{F2} + +a_3\hat{\beta}^2{}_{F1} \ + a_4\hat{\beta}^2{}_{F2} \ + a_5 RV_P + \varepsilon_{P,J89}$$

ההשערות לגבי המודל הן:

➢ a_0 - שווה או גדול מ- Rf.

➢ a_1, a_2 - חיובי (עפ"י דרישת ה- SML).

➢ a_3, a_4 - שווה לאפס, לפי SML הקשר ל- β הוא ליניארי.

➢ a_5 - שווה לאפס, כוון שהתשואה אינה תלויה בסיכון שניתן לפיזור