

חיזוי התשואה השנתית העתידית החזויה של מדד ה-S&P 500 לשנת 2024 באמצעות נראות מקסימלית ומודל מונטה קרלו



האקטואר **רועי פולניצר** אמד את התפלגות התשואות השנתיות העתידיות החזויות של מדד ה-S&P 500 לשנת 2024 אשר ממנה ניתן לגזור הסתברויות שונות למצבי טבע ותרמישים שונים של תשואות המדד העתידיות החזויות.

להלן התפלגות התשואות השנתיות העתידיות החזויות של המדד לשנת 2024:

Summary Statistics for S&P 500 in 2024		
Statistics	Percentile	
Minimum	5%	-23.68%
Maximum	10%	-17.31%
Mean	15%	-13.47%
Std Dev	20%	-9.57%
Variance	25%	-6.35%
Skewness	30%	-3.23%
Kurtosis	35%	-0.45%
Median	40%	2.53%
Mode	45%	5.42%
Left X	50%	8.11%
Left P	55%	11.22%
Right X	60%	13.94%
Right P	65%	17.29%
Diff X	70%	20.59%
Diff P	75%	25.01%
#Errors	80%	29.72%
Filter Min	85%	35.39%
Filter Max	90%	42.78%
#Filtered	95%	53.66%

מניתוח סימולציות מונטה קרלו עולה כי התשואה השנתית העתידית הצפויה של המדד לשנת 2024 בטווח סטיית תקן אחת, נאמד בטווח של כ-13.19% (תשואה שלילית) לבין 34.60% (בתוחלת של כ-10.71%), בעיקר בשל התנודתיות הגבוהה של המדד. נסביר כי על פי המודל שבניתי חוזה שהתשואה השנתית העתידית המינימלית החזויה של המדד בשנת 2024 היא מינוס 48.13% (כלומר, תשואה שלילית) בעוד שהתשואה השנתית העתידית המקסימלית החזויה של המדד בשנת 2024 תהיה 122.53%. התשואה השנתית העתידית החזויה של המדד בשנת 2024 נאמדה ב-8.11%, שזוהי תשואה יפה שמהווה רק שליש מתשואת המדד בשנת 2023, שהסתכמה ב-24.23%. התשואה השנתית העתידית השכיחה החזויה של המדד אפילו נמוכה יותר ונאמדה בכ-5.50% (בגלל שמדובר בהתפלגות א-סימטרית חיובית).

אז אלו הסתברויות מודל הסימולציה שלי מספק? המודל שלי קובע שישנה הסתברות של 5% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה נמוכה יותר מ-23.68% (תשואה שלילית). במילים אחרות, המודל שלי גורס כי קיים סיכוי של 95% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ-23.68%.

המודל שלי קובע גם שישנה הסתברות של 55% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה נמוכה יותר מ-11.22%. במילים אחרות, קיים סיכוי של 45% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ-11.22%. ולבסוף המודל שלי קובע שישנה הסתברות של 95% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה נמוכה יותר מ-53.66%. במילים אחרות, המודל גורס כי קיים סיכוי של 5% שהתשואה השנתית העתידית של המדד בשנת 2024 תהיה גבוהה יותר מ-53.66%. כך תפרשו את ההסתברויות שבטבלה לעיל.

מהתוצאות לעיל, אנו למדים כי המודל שלי מנבא שברמת ביטחון של 90% שהתשואה השנתית העתידית החזויה של מדד ה-S&P 500 בשנת 2024 תהיה בין -23.68% (תשואה שלילית) לבין 53.66% ובתוחלת כ-10.71%.

אך אנו נפשט את הדיון ולא ניכנס להתפלגויות נורמליות ולדברים מסובכים אחרים, ונניח שההתפלגות לצורך העניין היא בינומית, משמע, דיון המתמקד בשני מצבי עולם: מחיר המדד הגבוה יותר מהמחיר המדד הנוכחי או מחיר המדד הנמוך יותר מהמחיר המדד הנוכחי. שני מצבי עולם בלבד.

תחילה, אספתי נתונים על מחירי הסגירה היומיים של המדד בתקופה 31.10.2018-31.12.2023. לאחר מכן, באמצעות טכניקה אקטוארית שנקראת "אומדני נראות מקסימלית" (Maximum Likelihood Estimators: MLE) נאמד את תוחלת התשואה היומית הצפויה ואת תוחלת סטיית התקן היומית הצפויה של המדד לתקופה הנבדקת (כשמדברים על העתיד מדברים על תוחלת, קרי, על ממוצע. למה? כי הממוצע הוא המשערך/המנבא הטוב ביותר בטבע).

טכניקת הנראות המקסימלית כרוכה בבחירת ערכים עבור הפרמטרים שממקסמים את הסיכוי (או הסבירות) להתרחשות הנתונים. כדי להמחיש את הטכניקה, נתחיל בדוגמה פשוטה מאוד. נניח שנגדום 10 מניות באקראי ביום מסוים ונגלה שהמחיר של אחת מהן ירד באותו יום בעוד שמחיריהן של התשעה האחרות נשארו זהים או עלו. כעת מהי ההערכה הטובה ביותר שלנו בדבר הסיכוי שמחיריהן של 10 המניות שלנו ירדו? התשובה הטבעית היא 10%. וזה בדיוק מה שטכניקת הנראות המקסימלית הייתה נותנת רק באמצעות פתרון בעיית אופטימיזציה של פונקציה מתמטית (כלומר, על ידי גזירה של הפונקציה, השוואת הנגזרת הראשונה שלה לאפס וחילוץ הפרמטר שפותר את המשוואה – הוא שורש הפונקציה).

אז באמצעות טכניקת הנראות המקסימלית קיבלתי שתוחלת התשואה היומית הצפויה של המדד נאמדת ב-0.042%. בעוד שתוחלת סטיית התקן היומית הצפויה של מדד ה-S&P 500 נאמדת ב-1.356%. תחת הנחה של 252 ימי מסחר בבורסת ה-NYSE בניו יורק (הבורסה שבה נסחר מדד ה-S&P 500) נקבל כי תוחלת התשואה השנתית הצפויה של מדד ה-S&P 500 נאמדת ב-10.59% לשנה בעוד שתוחלת סטיית התקן השנתית הצפויה של מדד ה-S&P 500 נאמדת בכ-21.52%.

כעת הרצתי מודל אקטוארי בשם מודל מונטה-קרלו (5,000 הרצות) שמבוסס על Brownian motion. נסביר כי מודל Monte Carlo מבוסס סדרות סימולציות משתני החלטה סטטיסטיים סטוכסטיים (5,000 מסלולים כפול 12 איטרציות ובסך הכל 60,000 סימולציות), המבוססים על סטיות תקן ותוחלת משתני החלטה (Variable Factors) קריטיים במודל, על ידי חישוב איטרטיבי לתשואה השנתית העתידית של מדד ה-S&P 500 ליום 31.12.2024 (ברזולוציה חודשית) ביחס למצבי טבע ותרמישים שונים.

מודל Monte Carlo משמש אותי לשם בחינת התפלגות התוצאות ביחס לתוחלת וסטיית התקן של משתנים פרוספקטיביים קריטיים לתוצאות החזוי וביחס לתוצאות רטרופקטיביות של תשואות המדד.

אחת הטענות הבסיסיות של משקיעים הינה שאיש אינו יכול לחזות את השינויים העתידיים במחיר מדד ה-S&P 500 (להלן: "המדד") ומכאן שהם מתקשים מאד לקבוע האם ברמת המחיר הנוכחי כדאי להם "להיכנס" למדד (למי מהם שעוד לא נכנס אליו) כי זינוק במחיר המדד עשוי להתרחש או "לברוח" ממנו (למי שכבר מושקע בו) כי צניחה במחיר של המדד עלולה להתרחש. איש הרי אינו יודע מה יהיה בעתיד והעבר אינו מלמד דבר על מחירי המדד שיתממשו מעתה והלאה.

ואכן, אחת מאבני היסוד של תורת המימון היא הנחה פונדמנטלית (שאינה ניתנה לשינוי) שקובעת שלמחירים הנוכחיים בשוק "אין זיכרון" (memoryless) ואין הם יכולים לפיכך להיות מושפעים ממחירי עבר. משמע, העבר אינו מלמד דבר על העתיד. זוהי הנחה בסיסית למשל, במודל בלאק אנד שולס לתמחור אופציות.

נניח שטענה זו נכונה. לא ניתן לדעת אם מחיר המדד מחר, או בעוד שבוע או בעוד חודש או בזמן כלשהו בעתיד יהיה גבוה יותר או נמוך יותר ממחיר המדד הנוכחי, אותו מחיר הנקרא מחיר ה"ספוט".

בואו לרגע ולא נניח לאותם משקיעים הטוענים כך. הרי למעשה הם אומרים או מניחים לפיכך, שקיימת הסתברות של 50% שמחיר המדד בעוד זמן t מהיום יהיה גבוה יותר ממחיר הספוט הנוכחי ובאותה מידה בהסתברות של 50% שמחיר המדד בעוד זמן t מהיום יהיה נמוך יותר ממחיר הספוט הנוכחי. למעשה זוהי הנחה הזרה לזו של הטלת מטבע, "עץ" או "פאלי".

כמובן שיש לכאורה טיעון נוסף שאותו ניתן לטעון והוא שמחיר המדד יהיה בדיוק באותו מקום בעוד זמן t אך אנו נתעלם מטיעון זה ונחזיק את התעלמותנו בהנחה נוספת של תורת המימון שקרויה Brownian motion (תנועה בראונית). תנועה בראונית הינה הנחה תועלתנית שמחירים הינם בעלי תנודתיות מתמדת שמורכבת משינויים אקראיים ("הילוך מקרי", Random walk) בתוספת "סחיפה" Drift, משמע, שמחירים של מניות, מדדי מחירים, או מחירי סחורות אינם נשארים אף פעם במקום אלא הם נעים ונדים כל הזמן.

כעת, אם ניכנס לרגע לנעליים של אותם משקיעים, אנו מניחים שהעתיד בשוק ה-S&P 500 הוא הטלת מטבע עץ או פאלי. בעיה מרכזית בטיעון זה קשורה לפרמטר אמפירי חשוב ביותר וידוע מאוד שהתנהגות המחירים על פני זמן בשוק ה-S&P 500 ארוכה מדי שוק (אינדקס) אחרים הינה בצורת התפלגות לוג נורמלית (נניח בצורת פעמון). כמובן שתופעה זו מסבכת את הבעיה מכיוון שהיא מניחה הסתברויות שונות "ליפול" על כל מחיר שהוא, כאשר ההסתברויות הצפופות יותר מרוכזות באזור המרכז, שהוא בדרך כלל מחיר הספוט (הנחה שההתפלגות הינה סימטרית ולצערנו ההתפלגויות הנורמליות בשווקים רבות אינן סימטריות).