



ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר באקטואריה

ביטוח פנסיה היא התפלגות פואסון

האקטואר **רועי פולניצר** מסביר כיצד התפלגות פואסון מאפשרת לחזות את מספר מקרי התמותה, הנכות, העזיבה והפרישה בקרן פנסיה.

התפלגות פואסון – התפלגות של ספירת אירועים

התפלגות פואסון מתארת את מספר הפעמים שאירוע מתרחש במהלך מרווח זמן נתון, כגון מספר שיחות טלפון לקדה או מספר השגיאות בכל עמוד במסמך.

תנאי ההתפלגות

שלושת התנאים העומדים בבסיס התפלגות פואסון הם:

- מספר ההתרחשויות האפשריות בכל מרווח הוא בלתי מוגבל.
- ההתרחשויות בלתי תלויות זו בזו. מספר ההתרחשויות במרווח אחד אינו משפיע על מספר ההתרחשויות במרווחים אחרים.
- מספר ההתרחשויות הממוצע חייב להישאר קבוע ממרווח אחד למשנהו.

המבנים המתמטיים של התפלגות פואסון הם כדלקמן:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \text{ for } x=0,1,2,\dots$$

הממוצע = λ

סטיית התקן = $\sqrt{\lambda}$

הא-סימטריה (Skewness) = $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

הגבנויות העודפת (Excess kurtosis) = $\frac{1}{\lambda}$

x מייצג את מספר האירועים בפועל.

λ מייצג את מספר האירועים הצפוי.



ההתפלגות מתאימה במיוחד למצבים שבהם:

- האירועים נדירים יחסית
- כל אירוע מתרחש באופן בלתי תלוי
- מספר הנבדקים גדול
- פרק הזמן הנבחן קבוע

אין בדיקת התנאים המאפיינים במקרים רבים את הסיכונים הפנסיוניים. לדוגמה, אם קרב 50,000 עמיתים בני 35 צפויים בממוצע 20 מקרי נכות בשנה, אז מספר מקרי הנכות בפועל עשוי להיות 18, 21 או 24. התפלגות פואסון מאפשרת לאמוד את ההסתברות לכל אחת מהאפשרויות הללו.

תכונות חוסר הזיכרון

התפלגות פואסון כשלעצמה אינה מאופיינת בתכונת "חוסר זיכרון" (Memoryless). בניגוד להתפלגות האקספוננציאלית, יחד עם זאת, תהליך פואסון (Poisson Process) שעליו מבוססת התפלגות פואסון, נהנה מתכונה קרובה מאוד מכונה "תוספות בלתי תלויות" (Independent Increments), ולעיתים מתארים אותה באופן אינטואיטיבי כמעין "חוסר זיכרון". ברמת התהליך, מאפיין חשוב של תהליך פואסון הוא שתכונותיו העתידיות אינן מושפעות ממספר האירועים שהתרחשו בעבר. אם ידוע כי במהלך תקופת זמן מסוימת התרחשו מספר מסוים של אירועים, מידע זה אינו משנה את ההתפלגות של מספר האירועים שיתרחשו בעתיד. לשון אחר-העבר אינו משפיע על התחזית העתידית, וכל פרק זמן חדש מתחיל "מדף צלם" מבחינה הסתברותית. לדוגמה, נניח כי בקרן פנסיה צפויים בממוצע 100 מקרי פרישה בשנה. אם במהלך ששת החודשים הראשונים של השנה כבר התרחשו 60 פרישות, עדיין מספר הפרישות הצפוי בששת החודשים הבאים יתפלג בדיוק כפי שהיה מתפלג אילו לא ידענו דבר על החודשים הראשונים. הווא אומה-מספר האירועים העתידיים בלתי תלוי במספר האירועים שהתרחשו בעבר. לעומת זאת, בתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות האקספוננציאלית הדגש הוא על משך הזמן עד לאירוע הבא: ההסתברות שאדם ישיר עוד t שנים אינה תלויה במהם שנים הוא כבר שרד. בתהליך פואסון הדגש הוא על מספר האירועים שיתרחשו בעתיד: ההתפלגות של מספר האירועים שיתרחשו בעתיד אינה תלויה במספר האירועים שהתרחשו בעבר. חשוב לומר שבעוד שההתפלגות

אקטואריה היא מדע העוסק במדידה, כימות וניהול של סיכונים פיננסיים וביטוחיים הנובעים מאירועים. למרות שאקטואריה ביטוח חיים ואקטואריה ביטוח פנסיה חולקות בסיס מתמטי משותף, קיימים ביניהן הבדלים מהותיים באופי הסיכונים הנמדדים, במטרת החישוב האקטוארי ובכלים הסטטיסטיים המרכזיים המשמשים להערכת הסיכונים. בעוד שבאקטואריה ביטוח חיים ההתפלגות הסטטיסטית החשובה ביותר היא ההתפלגות האקספוננציאלית, הרי שבאקטואריה ביטוח פנסיה ניתן לטעון כי ההתפלגות החשובה ביותר היא דווקא התפלגות פואסון, המתארת את מספר האירועים המתרחשים באוכלוסייה נתונה במהלך תקופת זמן מוגדרת. הבדל זה נובע מהשוואת הבסיס שבו חוזה ביטוח חיים פרטי לבין קרן פנסיה קולקטיבית. בעוד שבביטוח חיים האקטואר מתמחר את הסיכון של המבוטח הבודד, הרי שבקרן פנסיה האקטואר נדרש להעריך את התנהגותה של אוכלוסיית עמיתים שלמה. כתוצאה מכך, המוקד עובר מחיזוי "מתי יתרחש האירוע" אצל אדם מסוים לחיזוי "כמה אירועים יתרחשו באוכלוסייה במהלך תקופה מסוימת."

הסיכון המרכזי באקטואריה ביטוח חיים – סיכון התמותה

בביטוח חיים מסורתי, הסיכון המרכזי הוא סיכון התמותה. חברת הביטוח מבטיחה לשלם תגמולי ביטוח במקרה של מות המבוטח, ולעולם במהלך תקופת הביטוח או לשלם קצבה כל עוד הוא נותר בחיים. לפיכך, השאלה המרכזית היא: מהו הזמן הצפוי עד להתרחשות אירוע המוות? זהו בדיקת סוג הבעיה המכונה Time-to-Event. זמן עד להתרחשות אירוע. כאשר מניחים שעוצמת התמותה קבועה, הזמן עד למוות מתפלג אקספוננציאלית. ההתפלגות האקספוננציאלית היא לכן אבן יסוד באקטואריה חיים, משום שהיא מתארת את משך הזמן עד להתרחשותו של אירוע בודד. מנקודת מבט אקטוארית, המבוטח הבודד הוא יחידת הניתוח. האקטואר בוחר את גילו, מינו, מצבו הבריאותי ויתר מאפייניו, ומחשב את הערך הנוכחי של ההבטיחות הביטוחית כלפיו. במילים אחרות, אקטואריה ביטוח חיים מתמקדת בסיכון של הפרט הבודד. גישה זו מכונה בספרות המקצועית Reversionary Method משום שהשימוש במונח ברמת הפרט תוך התבססות על הסתברויות ההישרדות והתמותה של אותו מבוטח.

הסיכונים באקטואריה ביטוח פנסיה

באקטואריה ביטוח פנסיה התמונה מורכבת בהרבה. קרן פנסיה אינה מתמודדת רק עם סיכון תמותה אלא עם מספר רב של סיכונים המתוארים באמצעות טבלאות גריעה (Multiple Decrement Tables). בין הסיכונים המרכזיים ניתן למנות:

- סיכון תמותה (גריעה מטעמי מוות)
- סיכון יציאה לנכות (גריעה מטעמי מחלה)
- סיכון פרישה לגמלאות (גריעה מטעמי גיל)
- סיכון עזיבה מרצון או פיטורין (גריעה מטעמי סיום יחסי עובד-מעביד)
- סיכון משיכת כספים מוקדמת
- סיכון החלמה מנכות (בקרנות פנסיה הכוללות כיסוי נכות)

בכל שנה עלול עמית לצאת ממעגל העמיתים הפעילים בשל אחת מהסיבות הללו. לפיכך, האקטואר הפנסיוני אינו שואל רק: מתי ימות עמית מסוים? אלא: כמה עמיתים צפויים למות השנה? כמה עמיתים צפויים להפוך לנכים השנה? כמה עמיתים צפויים לעזוב את הקרן השנה? כמה עמיתים צפויים לפרוש לגמלאות השנה? זוהי כבר בעיה שונה לחלוטין מבחינה סטטיסטית.

מהפרט אל האוכלוסייה

נניח כי בקרן פנסיה מסוימת קיימים 100,000 עמיתים פעילים. האקטואר יכול להעריך עבור כל עמית בנפרד את הסתברות התמותה, הנכות או העזיבה שלו. אולם בסופו של דבר, לצורך ניהול הקרן, השאלה החשובה באמת היא כמה אירועים יתרחשו בכלל האוכלוסייה. לדוגמה:

- כמה מקרי מוות יתרחשו בקרב בני 40 השנה?
- כמה מקרי נכות יתרחשו בקרב בני 55 השנה?
- כמה עובדים צעירים צפויים לעזוב את הקרן השנה?

התחייבויות הקרן נקבעות לפי המספר הכולל של האירועים, ולא לפי האירוע של עמית בודד. כאן נכנסת לתמונה התפלגות פואסון.

האקספוננציאלית מאופיינת בתכונת חוסר הזיכרון, תהליך פואסון מאופיין בתכונת התוספות הבלתי תלויות. וקיים גם קשר עמוק ביניהם כך שכאשר האירועים מתרחשים לפי תהליך פואסון, הזמן שבין שני אירועים עוקבים מתפלג אקספוננציאלית. על כן תכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות האקספוננציאלית היא למעשה אחת הסיבות לכך שתהליך פואסון נהנה מתכונת התוספות הבלתי תלויות.

הקשר שבין ההתפלגות האקספוננציאלית והתפלגות פואסון

מעניין לציין שאין מדובר בשתי התפלגויות מתחרות, אלא בשתי זוויות הסתכלות שונות על אותו תהליך. כאשר הזמן עד להתרחשות אירוע בודד מתפלג אקספוננציאלית, מספר האירועים המתרחשים באוכלוסייה במהלך תקופת זמן נתונה מתפלג פואסון. זהו למעשה אחד הקשרים החשובים ביותר בתורת ההסתברות הסטוכסטית, משום שהתהליך האקספוננציאלי ותהליך פואסון הם שתי פנים של אותו מנגנון הסתברותי. לכן, ברמת הפרט ההתפלגות האקספוננציאלית מתארת את הזמן עד למוות, נכות או עזיבה, בעוד שברמת האוכלוסייה התפלגות פואסון מתארת את מספר מקרי המוות, הנכות או העזיבה. אקטואריה ביטוח חיים עוסקת בעיקר ברמה הראשונה, בעוד שאקטואריה ביטוח פנסיה עוסקת בעיקר ברמה השנייה.

הגישה הקולקטיבית (Collective Method)

הגישה המקובלת בקרנות פנסיה היא גישה קולקטיבית המכונה Collective Method. הקרן אינה מבטיחה לכל עמית תשואה או עלות ביטוח קבועה מראש. במקום זאת, כלל העמיתים חולקים ביניהם את הסיכונים הדמוגרפיים. כתוצאה מכך, האקטואר אינו מתמחר פוליסה בודדת אלא מעריך את העלות הכוללת של ההתחייבויות עבור כלל אוכלוסיית העמיתים. לצורך כך עליו להעריך את מספר מקרי המוות, את מספר מקרי הנכות, את מספר מקרי העזיבה, את מספר מקרי הפרישה וכו'. כל אלה הם משתנים של ספירת אירועים, ולכן התפלגות פואסון הופכת לכלי מרכזי בניתוח האקטוארי.

הקשר לאיזון אקטוארי

אחד המאפיינים הייחודיים של קרנות פנסיה הוא מנגנון האיזון האקטוארי. בביטוח חיים מסורתי, אם מספר מקרי המוות בפועל שונה מהתחזית, חברת הביטוח נושאת בדרך כלל בסיכון. לעומת זאת, בקרן פנסיה קולקטיבית, עודפים או גירעונות הנובעים מסיטת בין מספר האירועים החזוי לבין מספר האירועים בפועל מועברים לכלל העמיתים באמצעות מנגנון האיזון האקטוארי. לדוגמה, אם מספר מקרי הנכות בפועל היה גבוה מהתחזית, הקרן עשויה להיקלע לגירעון אקטוארי, בעוד שאם מספר מקרי המוות היה נמוך מהצפוי, עשוי להיווצר עודף אקטוארי. מנגנון זה אינו קיים בדרך כלל בחוזי ביטוח חיים הקלאסיים שבהם הסיכון נותר בידי חברת הביטוח.

סיכום

בעוד שאקטואריה ביטוח חיים מתמקדת בפרט הבודד ובמשך הזמן עד להתרחשות אירוע ביטוחי, אקטואריה ביטוח פנסיה מתמקדת באוכלוסיית העמיתים כולה ובמספר האירועים הצפוי להתרחש בה במהלך תקופת זמן נתונה. משום כך, בעוד שההתפלגות האקספוננציאלית מהווה את אבן היסוד של מודלי הזמן-עד אירוע באקטואריה חיים, הרי שהתפלגות פואסון מהווה את אבן היסוד של מודלי ספירת האירועים באקטואריה פנסיה. היא מאפשרת לאקטואר להעריך את מספר מקרי התמותה, הנכות, העזיבה והפרישה באוכלוסיית העמיתים, והיא עומדת בבסיס החישובים הנדרשים לניהול קרן פנסיה, לקביעת עלויות הכיסוי הביטוחי ולשמירה על איזון אקטוארי לאורך זמן. למעשה, בעוד שההתפלגות האקספוננציאלית מתארת את משך הזמן עד לאירוע עבור עמית בודד, התפלגות פואסון מתארת את מספר האירועים בכלל אוכלוסיית העמיתים, ולכן שתי ההתפלגויות משלימות זו את זו ומהוות יחד את הבסיס המתמטי של האקטואריה הדמוגרפית.

הכותב הוא אקטואר סיכונים פנסיוניים מוסמך, לשעבר נשיא האיגוד הישראלי לאקטוארים (AIA) וכיום נשיא לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפנסיוניים בישראל (IAVFA), מחבר הספר הראשון באקטואריה שפורסם אי פעם בישראל ובעברית "המדריך לאקטוארים של ביטוח חיים", מומחה לאקטואריה, מסמך אקטוארי בישראל, בעל מקצוע מוערך בתחומי האקטואריה, מייסד של 2 איגודים אקטואריים מקצועיים מוכרים ובעלי מוניטין, קיבל מסגן ראש הממשלה ומשר המשפטים (בהסמכתו מ"מ נשיאות בית המשפט העליון) מינוי לכהן כחבר בוועדה לבחינת אקטוארים מטעם בתי המשפט בתפקיד נציג איגוד אקטוארי מוכר בישראל, קיבל מהנהלת בתי המשפט מינוי לתפקיד מומחה מטעם בתי המשפט בתחום המוחיות אקטואריה וכלכל ברישמת המומחים של בתי המשפט בתחום המוחיות אקטואריה.