

14/05/07

לכבוד,
גב' עופרה ימין
די פארם בע"מ.

הנדון: הערכת שווי אופציות לעובדים

1. כללי

המוסד הישראלי לתקינה חשבונאית הפיץ לאחרונה תקן חשבונאות מספר 24 המבוסס על תקן IFRS2 העוסק בהכרה ומדידה של עסקאות תשלום מבוססות מניות, לרבות כללי מדידה ודרישות ספציפיות לעסקאות עם העובדים.

לאופן אמידת השווי ההוגן של האופציות תהא השפעה על רווחיות החברה בשנים הבאות ועליו להיבחן בקפידה תוך ראיה דקדקנית של פרמטרים ושיקולים מימוניים, העשויים לצמצם את ההוצאות הפוטנציאליות הנובעות ממימוש האופציות. במסגרת זו ולאור תוכנית חלוקת האופציות של די פארם, בקשה החברה מחברת חיסונים פיננסים חדרי עסקאות בע"מ לשערך את השווי ההוגן של האופציות נכון לתאריך 15/01/07, בכפוף לדרישות התקן ולפי שוויין ביום ההענקה.

מסמך זה יציג את מכלול השיקולים בבחינת המודל לאמידת שוויין של האופציות, לרבות התייחסות למודלים קיימים אחרים והערכת שווי האופציות הלכה למעשה. המסמך כולל התייחסות לנושאים הבאים:

- תקן חשבונאות מספר 24;
- מודלים לתמחור אופציות;
- מודל בינומי - מתודולוגיה;
- תוכנית חלוקת האופציות;
- שווי האופציות.

2. תקן חשבונאות מס' 24

2.1 רקע

חברות רבות מעניקות לעובדים מניות או אופציות למניות. הקצאות אלה מהוות דרך תגמול מקובלת לעובדים, מנהלים, דירקטורים ואחרים. עד פרסום התקן, לא הייתה תקינה ישראלית רלוונטית בנושא. חלק מהחברות בישראל, בעיקר עקב היבטי מיסוי (סעיף 102 או 3 ט') ובמיוחד חברות שמניותיהן נסחרות בבורסות בארה"ב, יישמו את התקינה האמריקאית בנושא. בהתחשב בשכיחות העולה וגוברת של עסקאות בדרך של תשלום מניות, עלה הצורך בפרסום תקן אשר יסדיר את הטיפול החשבונאי בעסקאות אלה.

2.2 שיטות הערכה מקובלות

תקן חשבונאות מספר 24, מבוסס על תקן בינלאומי IFRS 2, והוא בתוקף החל מ-1 בינואר 2006. התקן חל על כל המכשירים ההוניים שהוענקו לאחר ה-15 במרס 2005 וטרם הבשילו במועד תחילת התקן ועל שינויים שחלו בתוכניות קיימות. כמו כן, התקן חל על התחייבויות הנובעות מתשלום מבוסס מניות, הקיימות במועד התחילה, ללא קשר למועד הענקתן.

2.3 תחולת התקן

התקן קובע הנחיות והוראות יישום מפורשות לשערוך שווי האופציות לעובדים שהשלכותיהן עשויות, בין היתר, למנוע את השימוש במודל Black & Sholes; וכך קובע התקן:¹

"באשר לאופציות למניות המוענקות לעובדים, במקרים רבים מחירי השוק אינם זמינים, מאחר והאופציות המוענקות כפופות לתנאים שאינם מיושמים על אופציות סחירות. אם אופציות סחירות בתנאים דומים אינן קיימות, יש לאמוד את השווי ההוגן של האופציות המוענקות על ידי יישום מודל לתמחור אופציות. הישות תשקול גורמים, שמשתתפים מרצון בשוק, הפועלים בצורה מושכלת, היו שוקלים בבחירת המודל שייושם לתמחור אופציות. לדוגמה, למרבית האופציות לעובדים משך חיים ארוך, הן בדרך כלל ניתנות למימוש במהלך התקופה שבין מועד ההבשלה לבין תום חיי האופציות ומימושן לעתים קרובות מתרחש מוקדם. גורמים אלה יבחנו בעת אמידת השווי ההוגן של האופציות במועד הענקתן. לגבי ישויות רבות, דבר זה עשוי למנוע את השימוש בנוסחת בלק-שולס-מרטון (Black –Scholes-Merton formula), אשר אינה לוקחת בחשבון אפשרות למימוש לפני תום חיי האופציה ועלולה שלא לשקף במידה מספקת את ההשפעות של מימוש מוקדם צפוי.² כמו כן, נוסחה זו אינה לוקחת בחשבון את האפשרות שתנודתיות צפויה ופרמטרים אחרים של המודל עשויים להשתנות במהלך חיי האופציה. עם זאת, לגבי אופציות למניות שמשך חייהן החוזיים הוא קצר יחסית, או שיש לממשן תוך פרק זמן קצר לאחר מועד ההבשלה, יתכן שהגורמים שצוינו לעיל, אינם מיושמים. במקרים אלה, נוסחת בלק-שולס-מרטון עשויה להביא לערך שיהיה למעשה זהה לערך שיתקבל ממודל גמיש יותר לתמחור אופציות".

¹ תקן 24 נספח ב הנחיות ויישום, אופציות למניות סעיף 4-ו-5.

² ההדגשה איננה במקור.

בסעיפים הבאים נסקור את המודלים העיקריים הקיימים להערכת שווי אופציות,³ את היתרונות ואת החסרונות של כל אחד מהם לאור תקן חשבונאות מספר 24; נציג את המודל אותו אנו מציעים להנהלת החברה לאמץ ואת שווי האופציות שניתנו לעובדים על-פי מודל נבחר זה.

3. מודלים לתמחור אופציות

3.1 רקע

המסחר באופציות על מניות החל מתחילת שנות ה-70 של המאה הקודמת בארה"ב. באותן שנים החלו מאמצים לפיתוח מודל אמין לתמחור אופציות שהסתכמו בהצלחה בשנת 1973 כאשר שני פרופסורים אמריקאים Fisher Black & Myron Scholes פיתחו נוסחה להערכת שווי אופציית רכש CALL אירופאית.⁴ היום מודל Black & Scholes (להלן B&S) הוא המודל המקובל ביותר להערכת שווי האופציה.

בסוף שנות ה-70 פיתחו Cox-Ross-Rubinstein את מודל העץ הבינומי. על-פי המודל מקבל מחיר המניה בסוף כל תקופה רק שני ערכים אפשריים: מצב עליה ומצב ירידה. בהמשך וכנגזרת של המודל הבינומי פותח מודל העץ התרינומי, לפיו בכל סוף תקופה, מחיר המניה עשוי לעלות, לרדת או להישאר ללא שינוי. ישנם מודלים נוספים שפותחו במרוצת השנים כגון סימולציית הסתברויות מונטה קרלו,⁵ קווי מונטה קרלו,⁶ The Whaley (Quadratic) model ומודלים נוספים. הנחת הבסיס העומדת ברוב המודלים היא אי סבירות של מצב ארביטרז'. במילים אחרות, בכל קומבינציית מצבים ובכל נקודת זמן לא יתכן מצב של הפקת רווח חסר סיכון. שאלה מרכזית בתמחור אופציות היא מה יהיה מחיר המניה בעתיד? חוסר היכולת לדעת את המחיר העתידי של המניה הוא אחד מנקודות התורפה העיקריות של כל מודלי האי ארביטרז' הקיימים כיום. נהוג להציב את סטיית התקן של תשואת נכס הבסיס בתור אלמנט המנבא את מחיר המניה בתקופה הבאה. כך, בהינתן מחיר המניה היום אנו מניחים שבזמן 1 המחיר שלה יהיה בגבולות של סטיית התקן של התשואה (סטיית התקן לאותה תקופה). עם זאת, איננו יכולים להציב ישירות את סטיית התקן של מחיר המניה בהיותה מתפלגת לוג-נורמאלית ולכן נהוג להשתמש בסטיית תקן של תשואת נכס הבסיס שמתפלגת נורמאלית. השאלה המתבקשת אפוא היא איזה סוג סטיית תקן יש להציב בתור אלמנט המנבא את מחיר נכס הבסיס? מבדילים בין מספר סוגים של סטיית תקן:

- סטיית תקן היסטורית - אומדן תנודתיות שמחושב על סמך תצפיות העבר כפי שנרשמו בבורסה.
- תנודתיות נצפית - תנודתיות אותה צופים לתקופת חיי האופציה והיא סובייקטיבית לחלוטין ותלויה בהשקפותיו וציפיותיו של המודד.

³ מסמך זה יתמקד בשני המודלים המקובלים ביותר לתמחור אופציות: Black&Scholes והמודל הבינומי.

⁴ אופציה אירופאית לא ניתנת למימוש לפני תאריך הפקיעה.

⁵ מחשבון מונטה קרלו מחשב את ההסתברות של מחיר המניה להיות בנקודה ספציפית.

⁶ המודל מנסה לחשב את נקודה קריטית בא תמומש אופציה אמריקאית במימוש מוקדם.

- תנודתיות גלומה - התנודתיות המשתקפת ממחיר האופציה כפי שנסחרת בפועל. למעשה, זוהי אותה תנודתיות שבהצבתה במודל B&S נקבל את מחיר האופציה כפי שהיא נסחרת כיום.

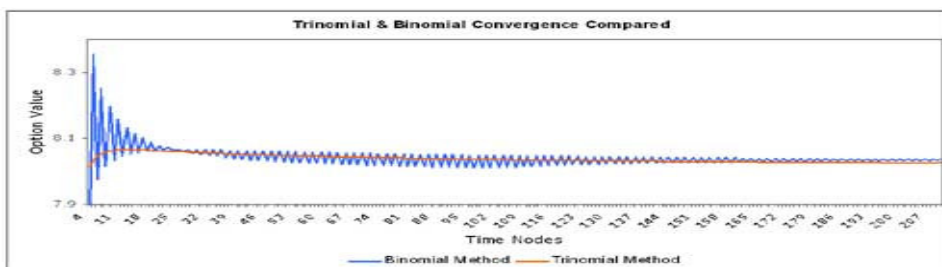
במטרה להתמודד עם סוגיה זו פותחו במהלך השנים מודלים מתוחכמים שלמים להערכת התנודתיות הצפויה של נכס הבסיס⁷ ושיטות רבות אחרות. המשותף לכל המודלים הללו הוא העובדה, שהצלחתם בחיזוי אינה מובהקת מבחינה סטטיסטית ולא ניתנת להעדפה כלשהיא על סמך מדידה אובייקטיבית. במילים אחרות, אופן בחירת שיטת המדידה עבור סטיית התקן הוא סובייקטיבי ובגדר הנחת העבודה. רוב החוקרים מציבים את סטיית תקן ההיסטורית של תשואות נכס הבסיס; הנחת העבודה העומדת במקרה זה היא שמה שהיה בעבר יהא גם בעתיד.

ראוי לציין, שתוצאות חישוב שווי האופציה שמתקבלות ברוב המודלים זהות (במיוחד עבור אופציות עמוק בתוך הכסף). הסיבה העיקרית לכך טמונה בהנחות עבודה דומות (אי ארביטרז' וכדומה) ושימוש משותף באותם משתנים אקסוגניים, כגון שיעור ריבית חסר סיכון, מחיר נכס הבסיס ובעיקר סטיית התקן של תשואות נכס הבסיס. להלן תרשים המשווה בין תוצאות שערך אופציית CALL אירופאית ב-5 מודלים שונים:⁸

Pricing European Call Options Compared X=110, r = 10%, D = 5%, V = 20%, T = 1							
S =	80	90	100	110	120	130	140
Black-Scholes-Merton							
Value=	0.7213	2.4006	5.7455	10.9350	17.7304	25.6900	34.3831
Monte Carlo Simulation (5,000 iterations)							
Value=	0.6928	2.3783	5.6838	10.7496	17.8559	25.5040	34.5363
absolute error	0.0285	0.0223	0.0617	0.1854	0.1255	0.1860	0.1532
Quasi-Monte Carlo Simulation (5,000 iterations)							
Value=	0.7057	2.3787	5.7172	10.9006	17.6897	25.6431	34.3300
absolute error	0.0156	0.0219	0.0283	0.0344	0.0407	0.0469	0.0531
Binomial Method (100 time steps)							
Value=	0.7083	2.3806	5.7580	10.9141	17.7315	25.6894	34.3740
absolute error	0.0130	0.0200	0.0125	0.0209	0.0011	0.0006	0.0091
Trinomial Method (100 time steps)							
Value=	0.7189	2.3944	5.7515	10.9245	17.7261	25.6873	34.3857
absolute error	0.0024	0.0062	0.0060	0.0105	0.0043	0.0027	0.0026

ניתן לראות ששיעור ההבדלים בין המודל הבינומי למודל B&S הולך ופוחת ככל שהאופציה נכנסת לתוך הכסף. נדבך נוסף המאשש תהליך התכנסות זה מצוי בחלוקת הזמן במודל הבינומי למספר תקופות הולך וגדל; כאשר משך כל תקופה במודל הבינומי מצטמצם בגבול, מספר התקופות שואף לאין סוף ואורך כל תקופה שואף לאפס, אזי שווי האופציה לפי המודל הבינומי מתכנס לשווי האופציה לפי מודל B&S. תהליך דומה מתרחש גם בין המודל הבינומי למודל התרינומי:

⁷ כגון מודל ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) ומודל Conditional Heteroskedasticity GARCH (Generalized Autoregressive Heteroskedasticity).
⁸ מקור: <http://www.global-derivatives.com>



מהשוואה זו ניתן לראות בבירור כי ככל שכמות המהלכים הולכת וגדלה שווי האופציה מתכנס לאותו מחיר עבור שתי השיטות.

3.2 מודל B&S אל מול המודל הבינומי

לפי תקן IFRS2 ניתן לבצע הערכת שווי לאופציות של עובדים לפי המודלים הבאים:

- מודל בינומי;
 - סימולציית מונטה קרלו;
 - Black&Scholes
- שיטת Lattice {

תוצאות התמחור של האופציות הסחירות זהות כמעט לחלוטין עבור כל מודלי האי ארביטריז'. ברם, בשערוך אופציות לעובדים, קיימים הבדלים מהותיים בין השיטות השונות. כך שאם נשווה בין מודל B&S, המקובל ביותר לשערוך אופציות סחירות, לבין המודל הבינומי, נגלה ששווי האופציה בשני המקרים יהיה שונה. הסיבה העיקרית לכך היא בהנחת היסוד של מודל B&S, בה קיימים משתנים אקסוגניים כגון ריבית חסרת סיכון וסטיית התקן של תשואת המניה הנותרים קבועים עד תום חיי האופציה. לעומת זאת, המודל הבינומי גמיש יותר ומאפשר שינוי בערכים אלו בין התקופות. סיבה נוספת היא שבמקרה של אופציות לעובדים מדובר בדרך כלל על תקופות ארוכות בהרבה מאופציות שנסחרות בבורסה. כך למשל, לקבוע היום את שיעור הריבית או את סטיית התקן של נכס הבסיס ל-10 שנים ולהניח שבמהלך השנים משתנים אלה נשארים קבועים לא יהיה נכון מבחינה מעשית. בנוסף, מודל B&S אינו מתייחס לאפשרות מימוש מוקדם או לתקופות ההבשלה (חסימה).

שיטה	מודל B&S	מודל בינומי
יתרונות	• נוח לשימוש; • נפוץ; • נוסחה פשוטה; • מתאים לחישוב אופציות רגילות לטווח קצר.	• מודל גמיש; • שימוש בשיעור ריבית ותנודתיות משתנה במקום קבועה; • שילוב התנהגות המימוש של העובדים; • הכללת חילוט האופציות לאחר תקופת ההבשלה.
חסרונות	• נוסחה קשיחה; לא רגישה לפרמטרים שיבחרו על ידי החברה לקביעת השווי; • אינו מאפשר חישוב של אופציות הכוללות תנאי שוק; • תנודתיות קבועה; • לא נלקחים בחשבון נתונים, כגון: זמן הבשלה; • המודל מתעלם מחילוט לאחר תקופת ההבשלה; • החישוב נעשה לפי אורך חיים צפוי וחסר היגיון כלכלי.	• נוסחה רגישה לפרמטרים שיבחרו על ידי החברה לקביעת השווי; • במקרה של מספר רב של תקופות ושינוי במשתנים (סטית תקן ושיעור ריבית) יישום הנוסחה מחייב מודל ממוכן.

4. המודל הבינומי- מתודולוגיה⁹

4.1 כללי

המודל הבינומי פותח בשנת 1979 על ידי Cox, Ross & Rubinstein. בדומה למודל B&S, המודל הבינומי מבוסס על הנחת יסוד של שוק משוקלל, כלומר על העיקרון שאין אפשרות ליצירת רווחי ארביטרז'. הנחות נוספות הן שיעור ריבית זהה ללווים ולמלווים ואין עלויות בגין ביצוע העסקה ודרישות להפקדת ביטחונות או מיסים.

להלן דוגמה מספרית בעזרתה יוצגו עקרונות היסוד של המודל הבינומי:¹⁰

C – אופציה CALL.

$S=50$ – מחיר המניה היום.

$S_U = 100$ – מחיר המניה בסוף התקופה במצב של עליות.

$S_D = 25$ – מחיר המניה בסוף התקופה במצב של ירידות.

$X=50$ – מחיר (או תוספת) מימוש של האופציה CALL על המניה.

$r=25\%$ – ריבית חסר סיכון במונחים שנתיים.

⁹ נתוני מקור: "Option Pricing: A Simplified Approach" Mark Rubinstein, Stephen A. Ross, John C. Cox
¹⁰ ההתייחסות בפיתוח היא לאופציה אירופאית בלבד.

נניח שרכשנו שתי מניות בעלות של 50 שקל כל אחת. בסוף התקופה מחיר המניה יכול להיות או 25 או 100. לצורכי ההגנה נמכור בחסר שלוש אופציות CALL במחיר מימוש 50; ובנוסף, ניטול הלוואה בריבית של 25% למימון רכישת המניות.

תחת הנחת עבודה של אי ארביטרז', לאופציה CALL יתכן מחיר אחד בלבד (לצרכי הדוגמא נדבר על תקופה אחת בלבד):

$$3C-100+40=0$$

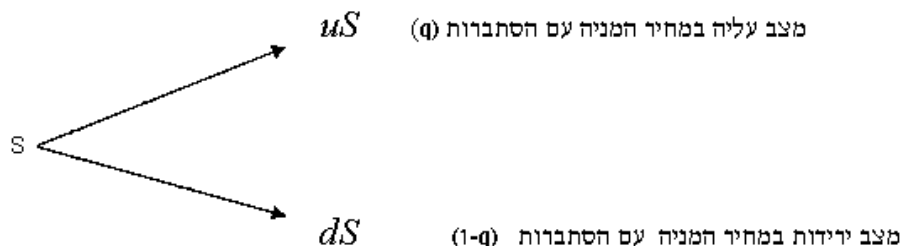
מכאן, מחיר אופציית CALL (50) שווה ל-20 ש"ח. הטבלה שלהלן מציגה את מחיר התיק בשני מצבי עולם (ש"ח):

ערך היום	ערך בזמן הפקיעה במצב עליות S=100	ערך בזמן הפקיעה במצב ירידות S=25	
מכירת 3 CALL (50)	60	(150)	0
קניית 2 מניות	(100)	200	50
לקיחת הלוואה	40	(50)	(50)
סה"כ	0	0	0

למעשה, יצרנו תיק חסר סיכון. בהנחה ומחיר האופציה שונה מ-20 ש"ח יתכנו מצבי ארביטרז'. לדוגמא, מכירת אופציות במחיר 25 ש"ח משיגה רווח חסר סיכון של 15 ש"ח בכל מצב עולם. מבחינה אינטואיטיבית מחיר נכס הבסיס בתום התקופה יכול לקבל רק אחד משני ערכים. כלומר, תיק שבנוי ממנייה ואופציה על מניה ימצא בתום התקופה באחד משני המצבים הבאים: עלייה או ירידה (UP או DOWN). תיק זה צריך לתת תשואה חסרת סיכון ומכאן ניתן לחלק את שווי האופציה.

4.2 מודל בינומי בתקופה אחת

נניח שני מצבי עולם במחיר המניה בסוף התקופה:



במטרה להימנע ממצב הארביטרז' ובנוסף להנחה ששיעור הריבית חסר הסיכון שווה ללווים ולמלווים אנו נדרוש קיום של: $u > r > d$ ¹¹. כלומר לא יתכן מצב ששיעור שינוי במחיר המניה כתוצאה מעליות (u) יהיה נמוך משיעור ריבית חסר סיכון לאותה תקופה (r); ולהיפך, במצב של ירידות (d). מכאן שווי אופציית CALL בסוף תקופה יהיה:

$$C \begin{cases} C_u = \max[0, uS - X] & (q) \text{ שווי האופציה בסוף התקופה עם הסתברות } q \\ C_d = \max[0, dS - X] & (1-q) \text{ שווי האופציה בסוף התקופה עם הסתברות } 1-q \end{cases}$$

כאשר X הוא תוספת המימוש או מחיר המימוש של האופציה. במטרה ליצור תיק חסר סיכון, נניח שאנו מחזיקים ב- Δ יחידות של מניה ו- B יחידות של אג"ח חסרת סיכון¹². שווי של התיק יהיה $\Delta S + B$. להלן מצבי התיק האפשריים בסוף התקופה:

$$\Delta S + B \begin{cases} \Delta uS + rB & (q) \text{ שווי התיק בסוף התקופה עם הסתברות } q \\ \Delta dS + rB & (1-q) \text{ שווי התיק בסוף התקופה עם הסתברות } 1-q \end{cases}$$

ניתן לחלץ את שווי האופציה בשני המצבים:

$$C_u = \Delta uS + rB$$

$$C_d = \Delta dS + rB$$

נבודד את Δ ואת B ונקבל:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}; B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} \quad (1)$$

¹¹ הכוונה מכאן ואילך ל-1 פלוס שיעור ריבית חסר הסיכון, או 1 פלוס שיעור עליה.

¹² קניית אג"ח חסרת סיכון שוות ערך להפקדת כסף בפקדון.

למעשה, מצאנו את כמות היחידות של מניות ושל אג"ח חסרות סיכון שיש להחזיק במטרה לגדר לחלוטין את התיק. כאשר מתקיים מצב של אי ארביטרז', שווי אופציה CALL בעלת מחיר מימוש X אינו יכול להיות נמוך משווי התיק $\Delta S + B$. ניתן לסכם את היחס בין שווי האופציה לבין שווי התיק בצורה הבאה:

$$C = \Delta S + B = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} = \left[\left(\frac{r - d}{u - d} \right) C_u + \left(\frac{u - r}{u - d} \right) C_d \right] / r \quad (2)$$

נגדיר את משוואה (3):

$$1 - p \equiv \frac{u - r}{u - d}, p \equiv \frac{r - d}{u - d}$$

נציב במשוואה (2) ונקבל:

$$C = [pC_u + (1 - p)C_d] / r \quad (4)$$

במשוואה (4) לא מופיעה הסתברות q . לכאורה, משקיעים שונים מעריכים את ההסתברות בצורה סובייקטיבית. מצד שני הערך של p תמיד גבוה מ-0 וקטן מ-1. נחזור לתחילת הפרק ונמצא שיווי משקל המאפשר לתיק שלנו להישאר חסר סיכון:

$$q(uS) + (1 - q)(dS) = rS$$

$$q = (r - d) / (u - d) = p$$

לסיכום, שווי אופציית CALL לפי המודל הבינומי הוא סכום ערכי האופציה במצב up ו-down המוכפלות בהסתברות ומהוונות לזמן 0 באמצעות שיעור ריבית חסר סיכון.

להלן דוגמה מספרית של תמחור אופציית CALL על מניה בעזרת מודל בינומי חד-תקופתי:

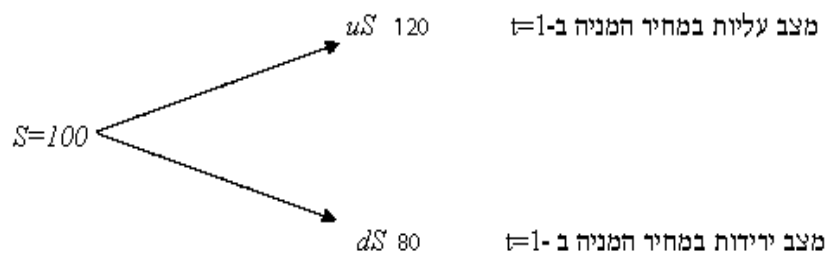
$$u = 1.2 \quad - \quad \text{מקדם מחיר המניה בסוף התקופה (עליה של 20\%)}$$

$$d = 0.8 \quad - \quad \text{מקדם מחיר המניה בסוף התקופה (ירידה של 20\%)}$$

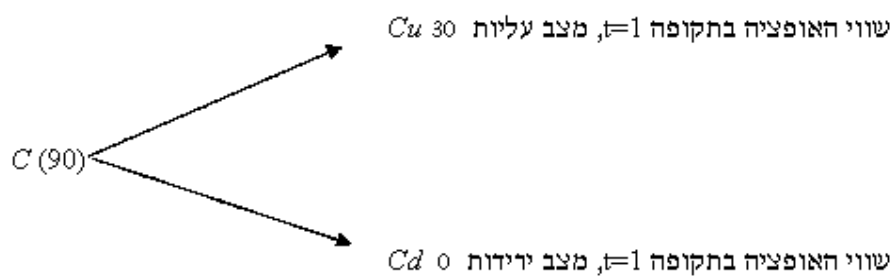
$$r = 10\% \quad - \quad \text{שיעור ריבית חסר סיכון לשנה}$$

$$S = 100 \quad - \quad \text{מחיר המניה בתחילת התקופה}$$

$$X = 90 \quad - \quad \text{מחיר מימוש של אופציה CALL על המניה}$$



מכאן שווי האופציה בתום תקופה אחת יכול להיות:



על-מנת למצוא את שווי אופציית ה-Call עלינו לחשב תחילה את ערכי ההסתברות p בעזרת משוואה (3) שהוצגה לעיל:

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \rightarrow p = \frac{1.1-0.8}{1.2-0.8} = 0.75$$

נציב את ההסתברות לתוך משוואה (4) ונקבל:

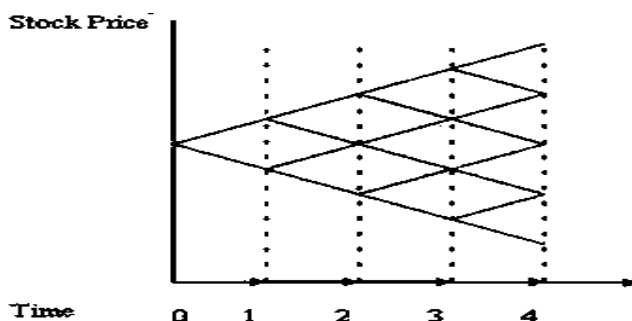
$$C = [pC_u + (1-p)C_d] / r$$

$$C = [0.75 * 30 + 0.25 * 0] / 1.1 \approx 20.45$$

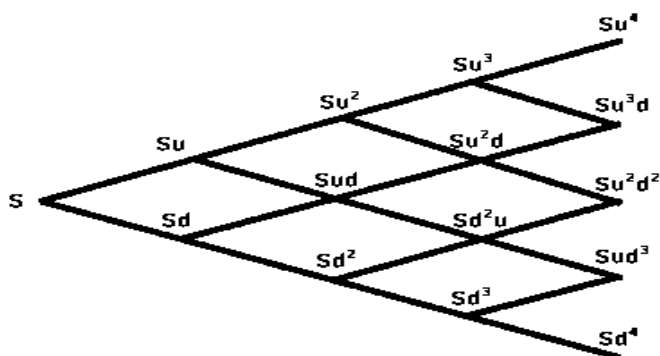
שווי אופציית CALL במחיר מימוש 100 הוא 20.45 ש"ח.

4.3 מודל בינומי רב-תקופתי

מודל בינומי רב-תקופתי ממשיך בהצבת שתי אפשרויות בכל מצב עולם קיים. רוצה לומר, אם אחרי תקופה אחת שווי האופציה יכול לקבל רק שתי ערכים, אזי אחרי שתי תקופות נקבל ארבע ערכים וחוזר חלילה. צורת חלוקה זו נקראת "עץ בינומי" או "חלוקה בינומית":



מהשרטוט הנ"ל ניתן לראות שבסוף כל תקופה, בכל צומת קיימים רק שני מצבים אפשריים בהם יכול להיות מחיר המניה: מצב up ומצב down. אם נניח שמחיר המניה מתנהג בהתאם לסטיית התקן ההיסטורית של תשואות נכס הבסיס, נוכל לקבל את המחיר בכל מצב טבע בעוד n תקופות:



ניתן לראות את התפלגות מחיר המניה לארבע תקופות קדימה. כך, על סמך מחיר המניה היום בעוד ארבע תקופות במצב של עליות רצופות, מחיר המניה יהיה Su^4 . בהינתן משוואה (4) יש לבצע מספר טרנספורמציות שיאפשרו עבודה במודל רב-תקופתי. תחילה נדרש לתרגם את שיעור ריבית חסר הסיכון ממונחים השנתיים למונחים תקופתיים רציפים. לשם כך נבצע מספר התאמות¹³:

$$\Delta r = r \frac{t}{n}$$

¹³ אותה דרך חישוב עבור התאמת הדיוידנדים הצפויים.

כאשר:

Δr - שיעור הריבית לתקופה.

r - ריבית חסרת סיכון לשנה.

t - משך התקופה במונחים שנתיים.

n - מספר מהלכים או צמתים בחישוב.

מכאן ניתן להגיע לריבית לתקופה במונחים רציפים ובהתחשב בשיעור דיווידנד לתקופה :

$$R = e^{(\Delta r - \Delta \delta)}$$

כאשר:

R - ריבית רצופה בניכוי דיווידנד הצפוי לתקופה.

$\Delta \delta$ - שיעור הדיווידנד לתקופה.

באופן דומה עלינו לתרגם את סטיית התקן של תשואת נכס הבסיס במונחים שנתיים (σ), למונחים

בינומיים¹⁴ של u ו- d . מכאן:

$$\log u = \sigma \sqrt{(t / n)} \rightarrow u = e^{\sigma \sqrt{(t / n)}}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{(t / n)}}, \text{ or } \rightarrow d = \frac{1}{u}$$

מכאן, ההסתברות של המניה להיות בסוף התקופה במצב u הינו:

$$p = \frac{R - d}{u - d}$$

על-מנת להמחיש את דרך החישוב של שווי אופציה מסוג אירופאי באמצעות מודל בינומי רב- תקופתי

להלן דוגמא מספרית:¹⁵

$S=100$ - מחיר המניה היום.

$t=0.25$ - תקופה במונחים שנתיים.

$n=5$ - מספר תקופות/צמתים.

$\sigma = 0.3$ - סטיית התקן של התשואה במונחים שנתיים.

$r=10\%$ - ריבית חסרת סיכון במונחים שנתיים.

¹⁴ במסמך זה לא יוצג הפיתוח המתמטי המלא.

¹⁵ מקור: <http://www.in-the-money.com>

שלב 1: חישוב של מצבי up ו-down לפי המשוואה:

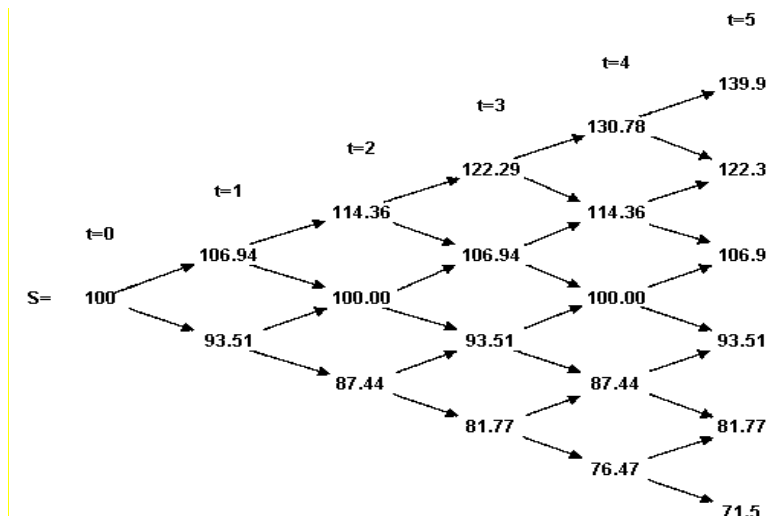
$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}} = e^{0.3\sqrt{0.25/5}} = 1.06938$$

מכאן שבמצב ירידות נקבל:

$$d = \frac{1}{u} = 0.935118$$

שלב 2: הצבת ערכים עתידיים אפשריים של המניה בעץ הבינומי. כך למשל, ערך עתידי של מניה לאחר שני מצבי up רצופים יהא בסוף התקופה: $u^2 S = 100 * 1.06938^2 = 114.36$ ובמצב down יהא: $d^2 S = 100 * 0.935^2 = 87.44$. לאחר 5 תקופות יהיה מחיר המניה במצב up רציף 139.9 ולאחר 5 פעמים רצופות של מצב down יהיה 71.5.

להלן שרטוט המציג את כל האפשרויות למחיר המניה בתקופות הבאות:



שלב 3: חישוב שיעור ריבית רצופה ומתואמת דיווידנד:¹⁶

$$R = e^{(\Delta r - \Delta \delta)} = e^{0.25/5 * 10\%} = 1.0501$$

שלב 4: חישוב ההסתברות של המניה להיות בסוף התקופה במצב up:

$$p = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.00501 - 0.93512}{1.06938 - 0.93512} = 0.52$$

¹⁶ בדוגמא ספציפית זו אין חלוקת דיבידנד.

לפיכך הסתברות למצב ה-down שווה ל-0.48.

שלב 5: בשלב זה נחלץ את שווי האופציה בעזרת תנועה רקורסיבית מסוף תקופה 5 ועד לתקופה 0. שווי

אופציה CALL עם מחיר מימוש 100 בסוף תקופה 5 מוגדר בצורה הבאה: $C = \max [0, S - X]$

במילים אחרות, שווי האופציה הוא 0 או בגובה ההפרש בין מחיר מימוש האופציה לבין מחיר המניה בסוף התקופה. יוצא ששווי האופציה בתקופה 5 במצב של עליות רצופות יהיה: $139.85 - 100 = 39.85$.

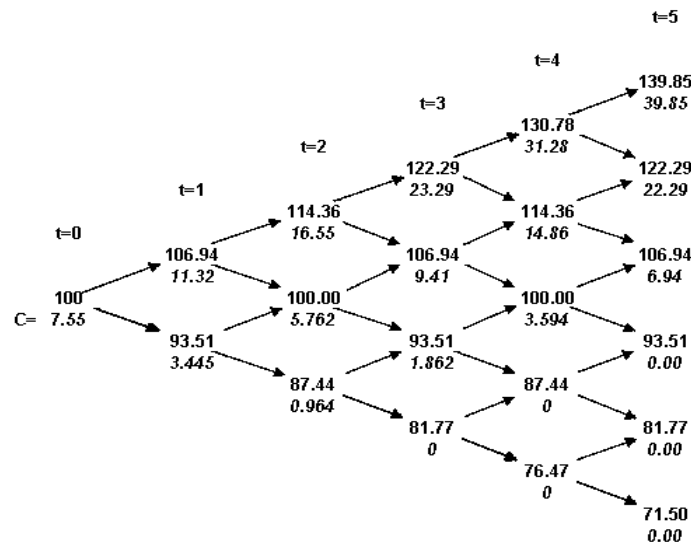
מכאן שיש לבצע חזרה לאחור לכיוון תקופה 0 בשלבים, כאשר ערך האופציה בתקופה $n-1$ הוא סכום המכפלות של ערכי האופציה בהסתברויות שלהן בתקופה n ; ומהוון בריבית חסרת סיכון. ניתן לייצג את שווי האופציה לפי המשוואה הבאה:

$$C_{n-1} = (pC_{u,n} + (1-p)C_{d,n}) / R$$

לדוגמא שווי האופציה בסוף תקופה 4 (כלומר בתום 4 תקופות רצופות של עליה במחיר המניה) יהיה:

$$C_{4u^4} = [0.52 * 39.85 + 0.42 * 22.29] / 1.0501 = 31.28$$

באותה דרך נחזור חזרה לתקופה 0. השרטוט שלהלן מציג את שווי האופציה בסוף כל תקופה והיום:



מהתרשים לעיל ניתן לראות ששווי אופציית CALL בעלת מחיר מימוש של 100 בתקופה 0 הינו 7.55 ש"ח.