



אמידת תנודתיות בשווקים פיננסיים – מאמר 1: סכמות שקלול ומודל ARCH(m)

האקטואר **רועי פולניצר** מציג את הבסיס התיאורטי של סכמות שקלול ומודל ARCH(m) לחיזוי תנודתיות בשוקי ההון.

סכום המשקלים חייב להיות שווה ל-1:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

מודל ARCH(m)

ניתן להרחיב את הרעיון של המשוואה הבאה:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

על ידי הנחה כי קיים שיעור שונות ארוך טווח ושגם לו מגיע לקבל משקל מסוים. זה מביא למודל מהצורה הבאה:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

כאשר V_L הוא שיעור השונות ארוך הטווח, γ הוא המשקל המוקצה לשיעור השונות ארוך הטווח. ומאחר שסכום המשקלים חייב להיות 1, או אז מתקיים ש-:

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

מודל זה מוכר כמודל ARCH(m). הוא הוצע לראשונה על ידי רוברט אנגל (ראו מאמר: R. Engle "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982): 987–1008). אומדן השונות מבוסס על

שונות ממוצעת ארוכת טווח ו- m תצפיות היסטוריות. ככל שהתצפית ישנה יותר, כך משקלה קטן יותר. הרעיון המרכזי במודל ARCH הוא שהתנודתיות הנוכחית מושפעת מהתנודתיות שנצפתה לאחרונה בשוק. במילים אחרות, תקופות של תנודתיות גבוהה נוטות להיות מלוות בתקופות נוספות של תנודתיות גבוהה, ותקופות של תנודתיות נמוכה נוטות להיות מלוות בתקופות נוספות של תנודתיות נמוכה. תופעה זו מוכרת בספרות בשם אשכולות התנודתיות (Volatility Clustering). אם נגדיר $\gamma V_L = \omega$, אז ניתן לכתוב את המודל באופן הבא:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

סיכום

מודל ARCH(m) היווה פריצת דרך משמעותית בתחום המידול הפיננסי, משום שהיה הראשון שהכיר בכך שהתנודתיות עצמה משתנה לאורך זמן. עם זאת, למודל זה קיימות מספר מגבלות, ובראשן הצורך לאמוד מספר רב של פרמטרים כאשר m גדול. במאמר הבא אציג את מודל EWMA, אשר מציע דרך פשוטה ואלגנטית להתמודד עם בעיה זו.

כותב מאמר זה מומחה בינלאומי לניהול סיכונים פיננסיים (FRM) מוסמך על ידי האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP) בארה"ב ומייצג לחברות בניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומים של הנדסה פיננסית, יישום סימולציות מונטה-קרלו, עצים בינומיים ותריונומיים, תהליכים סטוכסטיים ופתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות מהסוג המכונה Finite Difference Method.

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

אומדן חסר הטיה לשונות היומית:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2$$

כאשר $\bar{u}$ הוא התוחלת של ה- u_i ימים.

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}$$

לצורך מעקב אחר תנודתיות יומית, נהוג לבצע מספר שינויים בנוסחה:

1. מגדירים את u_i כשיעור השינוי במשתנה השוק בין סוף יום $i-1$ לבין סוף יום i (ככה למשל מחשבים את התנודתיות לצורכי חישוב מדד הערך הנתון בסיכון, Value-at-Risk):

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

2. מניחים ש- $\bar{u} = 0$ (להנחה זו בדרך כלל השפעה זניחה בלבד על אומדני השונות, משום שהשינוי הצפוי במשתנה במהלך יום אחד קטן מאוד בהשוואה לסטיית התקן של השינויים).

3. מחליפים את $m-1$ ב- m (החלפת $m-1$ ב- m מעבירה אותנו מאומדן חסר הטיה לאומדן של נראות מירבית - Maximum Likelihood Estimator).

שלושת השינויים הללו כמעט שאינם משפיעים על התוצאות המחושבות, אך הם מאפשרים לפשט את נוסחת השונות ל-:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2$$

אף שנוסחה זו פשוטה ונוחה לחישוב, היא מניחה שכל התצפיות ההיסטוריות חשובות באותה מידה, ללא קשר למידת עדכניותן. בסדרת מאמרים זו ה- u ימים מייצגים שיעורי שינוי יומיים במשתני שוק. במקרה של ה- u ימים, האינדקסים התחתונים (subscripts) מונים תצפיות שנערכו בימים שונים על אותו משתנה שוק. השימוש באינדקסים התחתונים i מתייחס לימים.

סכמות שקלול

המשוואה הקודמת מעניקה משקל זהה ל- $u_{n-1}^2, u_{n-2}^2, \dots, u_{n-m}^2$. מטרתנו היא לאמוד את רמת התנודתיות הנוכחית, σ_n . על כן הגיוני לתת משקל גבוה יותר לנתונים עדכניים. מודל שעושה זאת הוא:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

כאשר α_i הוא המשקל שניתן לתצפית מלפני i ימים. המשקלים (ה- α ו- α_j) הם חיוביים. אם נבחר את סכמת המשקלים כך ש- $\alpha_j < \alpha_i$, כאשר $i > j$, אז תצפיות ישנות יותר יקבלו משקל נמוך יותר.

בסדרת מאמרים זו אנסה להסביר כיצד אפשר להשתמש בנתונים היסטוריים לטובת יצירת אומדנים לרמות הנוכחיות והעתידיות של תנודתיות (Volatility, סטיות תקן). סדרת מאמרים זו רלוונטית במיוחד למעריכי שווי אופציות, לאקטוארים פיננסיים ולמנהלים פיננסיים, שכן לצורך עבודתם הם נדרשים להעריך את התנודתיות הצפויה של נכס בסיס פיננסי מסוים על פני משך חייו. סדרת מאמרים זו תבחן מודלים בעלי שמות מרשימים כגון: ממוצע נע משוקלל אקספוננציאלי (EWMA), הטרנסקדסטיות מותנית אוטורגרסיבית (ARCH) והטרנסקדסטיות מותנית אוטורגרסיבית מוכללת (GARCH). המאפיין המשותף של מודלים אלה הוא שהם מכירים בכך שהתנודתיות אינה קבועה. במהלך תקופות מסוימות התנודתיות עשויה להיות נמוכה יחסית, בעוד שבתקופות אחרות היא עשויה להיות גבוהה יחסית. המודלים מנסים לעקוב אחר השינויים בתנודתיות על פני זמן.

מידת התנודתיות של תשואות המניה

מבין כלל הפרמטרים המשפיעים על תמחור אופציות ועל מידול מחירי מניות, התנודתיות היא בדרך כלל הפרמטר המשמעותי ביותר. לכן מדידה לא נכונה של נתון זה תביא לעיוות בהערכת שווי אופציה למניה או במידול התפתחות מחיריה העתידיים של המניה. תחילה נסקור בקצרה את הדרך המסורתית למדידת התנודתיות, ונציע דרך אלטרנטיבית לאמידת התנודתיות. אמידת סטיית התקן באמצעות סטיית התקן ההיסטורית: לפי שיטת פתרון זו תימדד תחילה סטיית התקן ההיסטורית של תשואות המניה, ובאמצעותה מודדים את התנודתיות העתידית של תשואות המניה. בגישה המסורתית למדידת סיכון של מניה נערך שימוש בנתונים היסטוריים שנמדדו מתוך סדרת נתונים עתית של תשואות המניה. ההנחה בבסיס שיטה זו היא כי ניסיון העבר יחזור על עצמו, וכי *ex-post* סטיית התקן היא מדד טוב לסטיית התקן העתידית (Brenner and Galai, 1984). גישה זו מכונה לעיתים Historical Volatility, והיא עדיין מהווה את אחת השיטות הנפוצות ביותר בשוק ההון. מחד גיסא, ככל שנבחר יותר תצפיות לצורך אמידת סטיית התקן, נשיג דיוק רב יותר, אך כנגד זאת תצפיות כה רבות יכולות שלא לשקף את התנאים הכלכליים העתידיים. Tompkins (1994) ממליץ להשתמש בתשואות של מחירי הסגירה שנמדדו בתשעים ימי המסחר האחרונים. מספר הימים בשנה לצורך אמידת התנודתיות אינו 365, אלא 252, קרוב למספר ימי המסחר בשנה.

אמידת תנודתיות

נגדיר σ_n כתנודתיות של משתנה שוק (כגון: מחיר ני"ע, שער ריבית, שער חליפין, מדד מחירים, מחיר סחורה, מחיר מטבע וכו') ביום n , כפי שנאמדה בסוף יום $n-1$. ריבוע התנודתיות σ_n^2 קרא שיעור השונות (Variance Rate). נניח שערך משתנה השוק בסוף יום i הוא S_i . משתנה זה מוגדר כתשואה הרציפה (Continuous Compounded Return) במהלך יום i (בין סוף יום $i-1$ לבין סוף יום i):